

# **Matemática Aplicada às Ciências Sociais**

## **Prova Global de Avaliação**

### **PROVA NÚMERO 1**

Observação: a prova seguinte é da total responsabilidade dos autores do programa e o GAVE não é modo nenhum responsável por ela.

Duração aconselhada: 2h 30m

Material necessário: Formulário do GAVE, calculadora gráfica.

Esta prova é constituída por 4 questões relativas aos seguintes temas:

- 1- Métodos de Apoio à Decisão
- 2- Modelos Matemáticos
- 3- Estatística
- 4- Inferência Estatística

**PROVA 1**  
**Métodos de Apoio à Decisão**

**Leia com atenção o seguinte texto, parte de uma notícia do jornal “Jornal de Notícias” do dia 5 de Dezembro de 2004, onde se relata a eleição do bastonário (isto é, presidente) da Ordem dos Advogados (Associação de Advogados portugueses):**

**<<Rogério Alves conquista Ordem dos Advogados**

O novo bastonário da Ordem dos Advogados chama-se Rogério Alves, tem 43 anos (...). Eleito com 5849 votos, teve uma vantagem de apenas 919 votos sobre António Marinho, (...). António Marinho (...) ficou em segundo lugar, com 4930 votos (...). João Correia, que era vice-presidente do Conselho Geral cessante, ficou em terceiro lugar, recolhendo o apoio de 4574 eleitores.>>

[http://jn.sapo.pt/2004/12/05/sociedade/rogerio\\_alves\\_conquista\\_ordem\\_advoga.html](http://jn.sapo.pt/2004/12/05/sociedade/rogerio_alves_conquista_ordem_advoga.html)

- 1) Qual parece ser o método eleitoral usado para eleger o bastonário da Ordem dos Advogados? (Não precisa de indicar o nome do método, basta que explique qual foi o método usado)
- 2) Indique uma vantagem e um inconveniente da aplicação desse método.
- 3) Faça uma pequena composição em que sugira uma melhoria do método usado na eleição do bastonário da Ordem dos Advogados portuguesa.

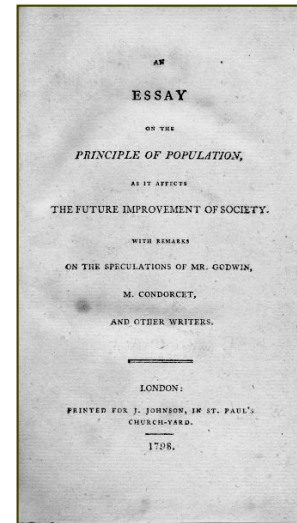
## Modelos Matemáticos - Modelos Populacionais

O economista e demógrafo britânico Thomas Malthus (1766-1834) ficou conhecido sobretudo pela teoria segundo a qual o crescimento da população tenderá sempre a superar a produção de alimentos, o que tornaria necessário o controle da natalidade. Em 1798, Malthus publicou anonimamente o seu “Ensaio sobre a população”, no qual afirma que a população cresce em progressão geométrica, enquanto a produção de alimentos aumenta em progressão aritmética. Malthus era um pessimista que considerava a pobreza como um destino ao qual o homem não podia fugir. Eis um extracto da segunda edição do “ Ensaio sobre a população”:

*“...Experimentemos determinar por um lado qual será o crescimento natural da população se ela for abandonada a ela própria sem nenhum constrangimento e, por outro lado, qual pode ser o aumento de produção das terras em circunstâncias favoráveis à indústria de produção. A comparação destas duas formas de crescimento levar-nos-á a conjecturar com alguma precisão o modelo de crescimento da população tendo em conta os meios de subsistência ...*

*...Mas para nos defendermos de algum exagero, vamos supor um crescimento que não seja demasiado rápido. Vamos ter por base testemunhos e admitir que a população não encontra mais nenhum obstáculo para além do referido. Então vamos admitir que ela duplica de 25 em 25 anos ...*

*Ao fim de 2 séculos a população estará na relação com os meios de subsistência como 256 está para 9; ao fim de 3 séculos como 4096 está para 13; e passados 20 séculos a diferença será imensa e, por isso, incalculável.”*



**Leia atentamente o extracto da obra de Malthus. Considere que no ano 0 a população é de 1 milhão e as reservas alimentares de 1 milhão de unidades.**

- a) Procure um modelo matemático que traduza o crescimento da população e outro modelo matemático que traduza o dos recursos alimentares, seguindo as ideias de Malthus. Com a ajuda de tabelas ou gráficos explique o seu raciocínio.
- b) Usando os modelos obtidos, determine a população e as reservas alimentares ao fim de 2 séculos.
- c) Supondo que cada 1000 habitantes necessita de 1 unidade de reservas alimentares, determine aproximadamente a altura em que as reservas alimentares deixam de poder sustentar a população.
- d) Apresente um argumento que possa invalidar as ideias de Malthus e explique porque, em geral, um modelo matemático só por si pode não permitir concluir o pretendido.

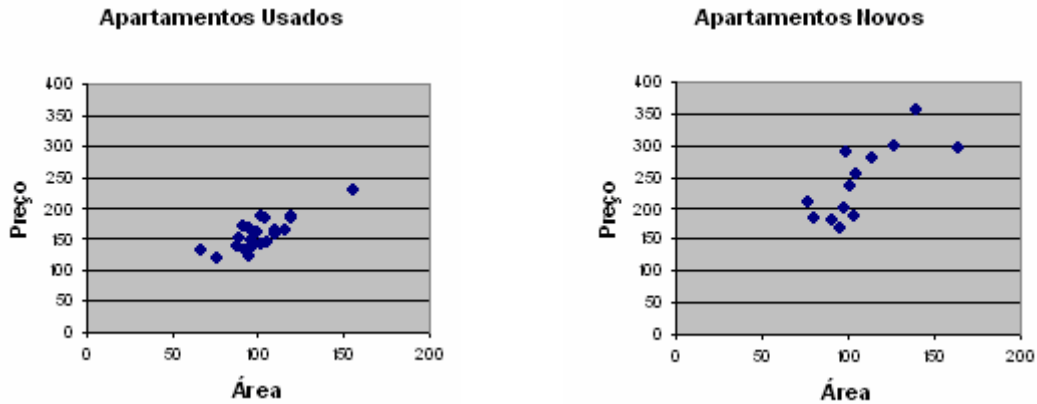
## PROVA 1 Estatística

Na tabela seguinte encontra-se registada alguma informação referente a 35 apartamentos, nomeadamente, nº de assoalhadas, área (em m<sup>2</sup>), estado (0-usado, 1-novo), ter ou não ter garagem (0-não tem, 1-tem), zona (A e B) e preço (em milhares de euros). Na tabela surge ainda uma coluna com o número de identificação de cada casa.

Ident.	Nº de assoalhadas	Área	Estado	Garagem	Zona	Preço
1	2	88,86	0	1	A	152,64
2	2	101,07	0	0	A	144,12
3	1	66,32	0	1	A	133,10
4	3	103,17	0	0	A	185,33
5	2	109,03	0	1	A	167,09
6	3	119,03	0	1	A	189,19
7	2	100,82	0	1	A	187,99
8	2	94,94	0	0	A	149,12
9	3	154,21	0	0	A	229,53
10	1	75,85	0	0	A	122,12
11	3	90,49	0	0	B	171,27
12	3	109,01	0	0	B	161,33
13	3	104,75	0	0	B	146,47
14	2	87,26	0	0	B	141,65
15	2	93,74	0	0	B	124,51
16	4	118,47	0	0	B	188,51
17	2	95,63	0	0	B	138,20
18	4	118,46	0	0	B	186,89
19	3	98,85	0	1	B	164,57
20	3	94,66	0	0	B	169,35
21	2	92,35	0	1	B	134,28
22	3	114,63	0	0	B	165,14
23	3	94,85	1	1	B	170,18
24	3	102,89	1	1	B	189,22
25	5	163,34	1	0	B	295,98
26	2	90,19	1	0	B	181,26
27	5	138,70	1	1	A	357,32
28	3	126,53	1	0	A	299,33
29	3	100,28	1	1	A	236,27
30	2	96,81	1	0	A	202,63
31	1	79,50	1	0	A	186,09
32	2	98,08	1	1	A	290,00
33	2	104,38	1	0	A	255,90
34	3	112,87	1	0	A	281,25
35	2	76,59	1	1	A	210,24

- Classifique as variáveis quanto ao tipo (qualitativo ou quantitativo – discreto ou contínuo).
- Quais as características amostrais que tem sentido calcular para a variável “Estado”. Calcule-as.

- c) Considerando a parte inteira da variável "Área":
- construa um diagrama de caule e folhas paralelos para comparar os valores desta variável nas Zonas A e B.
  - Tendo em conta a representação gráfica obtida faça uma pequena composição onde compare as áreas dos apartamentos nas duas zonas, dando destaque aos valores grandes e pequenos e sua possível relação com outra ou outras variáveis que surgem na tabela.
- d) Com base nos dados da tabela construíram-se os seguintes diagramas de dispersão.



Sabendo que num dos casos - caso A, se obteve um coeficiente de correlação  $r=0,82$  e uma recta de regressão  $y=1,2x+38,5$  e no outro caso - caso B, se obteve um coeficiente de correlação  $r=0,75$  e uma recta de regressão  $y=1,8x+49,1$ , diga, justificando convenientemente, a qual dos diagramas corresponde o caso A e o caso B.

## Inferência Estatística

A Professora de MACS pediu a dois grupos de alunos que averiguassem sobre a percentagem  $p$  (desconhecida) de alunos da Escola, que praticam, regularmente, desporto. Como indicação sugeriu que recolhessem, um grupo independentemente do outro, uma amostra aleatória de dimensão 50. Passado o tempo estipulado para entrega dos resultados obtidos, os dois grupos, que vamos designar por grupo A e grupo B, apresentaram os seguintes resultados:

**Grupo A:** A percentagem de alunos que praticam regularmente desporto, de entre os 50 a quem fizemos a pergunta, é de 25%.

**Grupo B:** A percentagem de alunos que praticam regularmente desporto, de entre os 50 a quem fizemos a pergunta, é de 28%.

1. Acha razoável ter obtido dois valores distintos para estimativa de  $p$ , com amostras da mesma dimensão? Explique porquê.
2. Relativamente aos resultados apresentados, tem alguma indicação sobre qual das duas estimativas pontuais estará mais perto de  $p$ ? Explique porquê.
3. Os grupos poderiam ter apresentado os seus resultados sobre a forma de intervalos de confiança, com uma confiança de 95%.
  - a. Obtenha esses intervalos.
  - b. Tem a garantia que algum desses intervalos contenha a percentagem  $p$ , dos alunos da Escola que praticam, regularmente, desporto? Justifique a sua resposta.
  - c. Se em vez de 2 amostras tivessem sido recolhidas 100 amostras, e construídos outros tantos intervalos de 95% de confiança, quantos destes intervalos esperaria que contivessem a percentagem  $p$ , que temos estado a estudar?
4. Suponha que o grupo A resolveu seleccionar uma amostra de dimensão 100, para obter um intervalo de 95% de confiança, mas *com uma maior precisão*, do que o que tinha obtido a partir da amostra de dimensão 50. Explique o que é que significa *uma maior precisão*, e a razão pela qual se espera obter uma maior precisão, aumentando a dimensão da amostra.

# Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova Global de Avaliação nº 1

## 1 Respostas

### 1.1 Questão 1

- 1) Ganha quem tiver maior número de votos (método maioritário a uma volta).
- 2) Vantagens: fácil ver quem é o vencedor; só necessária uma votação. Desvantagens: o vencedor teve menos votos que os seus dois opositores juntos; os que votaram no candidato que ficou em terceiro lugar prefeririam o primeiro ou o segundo?
- 3) Podem ser apontadas várias possibilidades de melhoria que devem ser devidamente justificadas: sistema maioritário a duas voltas; método de Borda, etc.

### 1.2 Questão 2

- a) crescimento da população: exponencial do tipo  $y = a2^{x/25}$ ; crescimento dos recursos: linear do tipo  $y = b + x/25$
- b) população:  $y = 256a$ ; recursos:  $y = b + 8$
- c) Podemos aqui supor  $a=1$  e  $b=0$ . Usando a calculadora verifica-se que tal acontece ao fim de 12860 anos aproximadamente.
- d) Não sabemos quais os valores de  $a$  e  $b$ . Pode haver inicialmente pouca população e muitos meios de subsistência; ao fim de muitos anos podem ser inventados novos métodos de produção que permitam aumentar os meios de subsistência de forma mais rápida; a população pode começar a crescer mais lentamente devido a outros factores (casamento mais tardio, menos filhos por falta de tempo para os criar, etc.).

## Prova nº 1 - Estatística

- a) nº assoalhadas – quantitative discreto  
 área – quantitative continuo  
 estado – qualitative  
 ter ou não ter garagem – qualitative  
 zona – qualitativo  
 preço – quantitativo contínuo

b) Moda = 0

c)

	6	6	
	5	7	
	9 8 7	8	7
	8 4	9	0 0 2 3 4 4 8
9 4 3 1 0 0	10	10	2 4 5 9
	9 6 2	11	4 8 8
	6	12	
	8	13	
		14	
	4	15	
	16	16	3

d) O caso A refere-se aos apartamentos usados, enquanto o caso B aos apartamentos novos. A nuvem de pontos relativamente aos Apartamentos Usados mostram a existência de uma maior associação linear, do que a existente para os Apartamentos Novos. Por outro lado, o declive da recta de regressão no caso dos Apartamentos usados, é menor que no outro caso.



## Inferência Estatística

1. Sim, devido à variabilidade presente na amostra
2. Não. Como não conhecemos o verdadeiro valor de  $p$ , não sabemos qual das estimativas está mais perto de  $p$ .

$$\begin{array}{l} 3. \text{ a) Grupo A} \quad 0.25 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{50}} \\ \text{Grupo B} \quad 0.28 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.28(1-0.28)}{50}} \end{array}$$

b) Não se tem a garantia. Tem-se uma confiança de 95% de que os intervalos contêm o verdadeiro valor de  $p$ .

c) Esperaríamos que aproximadamente 95 dos intervalos contivessem o valor de  $p$ .

4. Uma forma de aumentar a precisão do intervalo de confiança, isto, diminuir a sua amplitude, é aumentar a dimensão da amostra. Assim, com uma amostra de dimensão 100, espera-se que o intervalo de confiança tenha menor amplitude, já que não se espera que a estimativa pontual obtida para  $p$ , a partir da nova amostra, venha substancialmente diferente de 0.25.