5. Na aldeia de Xisto, vai realizar-se uma minimaratona.

Na Figura 1, encontra-se o grafo que serve de modelo ao percurso da minimaratona.

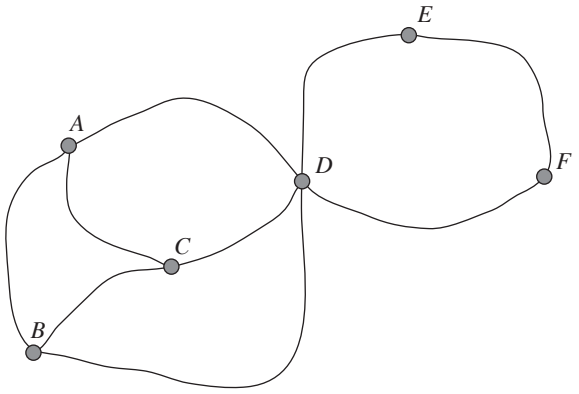


Figura 1

No grafo, o vértice B representa o ponto de partida e de chegada, e os vértices A, C, D, E e F representam postos de distribuição de água.

Cada aresta representa um trajeto direto que liga dois postos de distribuição de água ou um posto de distribuição de água ao ponto de partida.

5.1. Os organizadores da corrida decidiram que todos os participantes tinham de passar por todos os trajetos diretos, sem repetirem nenhum.

O Carlos, um dos organizadores da corrida, observou o grafo e afirmou:

«É impossível passar por todos os trajetos diretos sem repetir nenhum. Para garantir que os participantes passam por todos os trajetos diretos, é necessário admitir duplicações de trajetos diretos já existentes.»

Justifique a veracidade da afirmação, e apresente no grafo um par de duplicações de trajetos diretos que permita garantir que os participantes passam por todos os trajetos diretos.

Reproduza o grafo modificado na sua folha de respostas.

5.2. Admita que a probabilidade de um atleta, escolhido ao acaso, beber água no posto D, sabendo-se que esse atleta bebeu água no posto A, é $\frac{9}{10}$ e que a probabilidade de esse atleta ter bebido água nos dois postos é $\frac{3}{5}$.

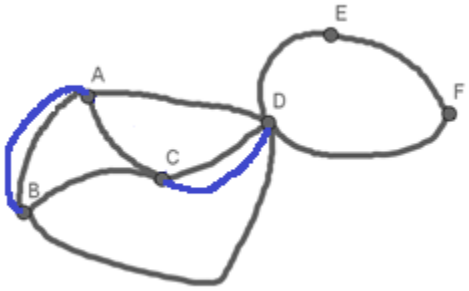
Determine a probabilidade de um atleta, escolhido ao acaso, ter bebido água no posto A.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5.

5.1 O Carlos tem razão porque para passar em todos os trajetos sem repetir nenhum, o grafo deve admitir um circuito euleriano, o que só acontece se todos os vértices tiverem grau par e se o grafo for conexo, como afirma o Teorema de Euler. Embora o grafo seja conexo, os vértices A, B, C e D têm grau ímpar (3,3,3 e 5, respetivamente), logo não é possível definir um percurso que contemple todos os trajetos sem repetir nenhum.

Desta forma duplicando as arestas AB e CD todos os vértices ficam com grau par, possibilitando que seja definido um percurso que permita percorrer todos os trajetos. Apresenta-se a seguir o grafo correspondente:



5.2. Considerando os acontecimentos:

A: «O atleta beber água no posto *A*»

D: «O atleta beber água no posto *D*»

e de acordo com os dados do enunciado, sabemos que:

$P(D \mid A) = \frac{9}{10}$ e que $P(D \cap A) = \frac{3}{5}$. Pretende-se calcular $P(A)$.

Como $P(D \mid A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D \mid A)}$ temos que:

$$P(A) = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

Assim a probabilidade de o atleta ter bebido água no posto *A* é de $\frac{2}{3}$.