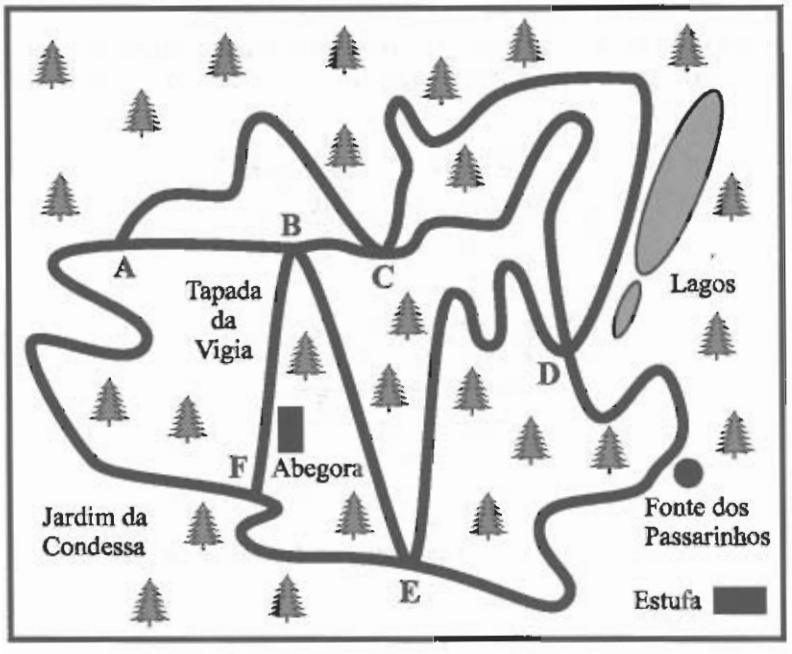
2. Alguns visitantes menos civilizados do Parque da Pena, em Sintra, têm por hábito deitar para o chão sacos de plástico, paus de gelado, latas de refrigerante, etc.
Um grupo de jovens amantes da natureza decide, durante uma tarde, ajudar a recolher todo o lixo existente nos caminhos duma zona do Parque.
Na figura, está um mapa dessa zona do Parque da Pena. Os cruzamentos dos caminhos estão assinalados por letras, de **A** a **F**.



Admita que o grupo de jovens parte do ponto **A**, assinalado no mapa, percorre todos os caminhos assinalados, recolhendo o lixo, e regressa ao ponto **A**.

2.1. O grupo de jovens tem de percorrer pelo menos um caminho, mais do que uma vez. Justifique esta afirmação, começando por modelar, por meio de um grafo, o mapa da zona do Parque da Pena representado na figura.

2.2. Indique um percurso em que o número de caminhos percorridos mais do que uma vez seja o menor possível. Dê a sua resposta na forma de uma sequência de letras, de acordo com a sequência de cruzamentos do percurso por si escolhido.

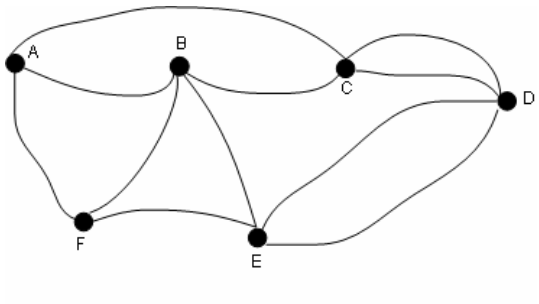
2.3. Na obra de Joseph Malkevitch, *Modelos de Grafos*, pode ler-se: «*A ideia chave na modelação matemática consiste em tomar a situação original e simplificá-la de tal modo que fiquemos com uma nova visão sobre o problema original.*»

Elabore uma composição onde desenvolva a ideia expressa, nesta frase, por Joseph Malkevitch. Baseie-se no modelo que considerou nas alíneas anteriores ou num exemplo à sua escolha, que integre a utilização de grafos.

Nessa composição deve referir:
- o porquê da necessidade de simplificar a realidade;
- o porquê da necessidade de distinguir o essencial do acessório;
- os aspectos que foram simplificados, relativamente à situação original.

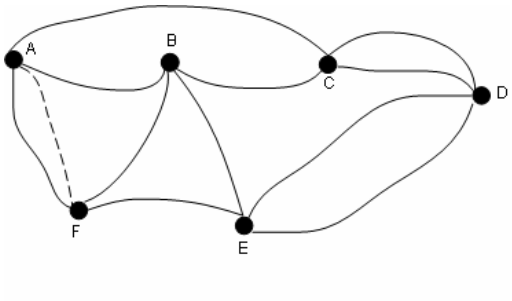
2.1 O grafo que modela a situação poderá ser o seguinte:
Em que os vértices correspondem a cruzamentos e as arestas aos diversos caminhos do parque (unindo dois cruzamentos)

Grau (A) = 3
Grau (B) = 4
Grau (C) = 4
Grau (D) = 4
Grau (E) = 4
Grau (F) = 3



Dizer que o grupo de jovens tem de percorrer pelo menos um caminho, mais do que uma vez, significa afirmar que não é possível percorrer todas as arestas deste grafo sem repetir nenhuma, começando e terminando no vértice A. O que é o mesmo que dizer que este grafo não admite um circuito de Euler. Ora, sabe-se que é condição necessária e suficiente para que exista tal circuito, que todos os vértices tenham grau par. Como existem vértices com grau ímpar (vértices A e F) neste grafo, não existe tal circuito. Portanto para percorrer todas as arestas do grafo, nas condições aqui indicadas (começar e terminar no vértice A) vai ter que se repetir pelo menos uma aresta.

2.2 Basta que se repita o caminho correspondente à aresta que une o vértice A ao vértice F.



De facto, acrescentando uma aresta entre os vértices A e F (representando que esse será um caminho a repetir), no grafo que agora modela a situação todos os vértices têm grau par e como tal é agora possível percorrer todas as arestas deste novo grafo, sem repetir nenhuma, começando e terminando em qualquer vértice.

Um percurso possível a começar e terminar no vértice A, será:
A B C A F E D C D E B F A

2.3. Se se está perante um problema, convém identificar os seus elementos essenciais, destacá-los e negligenciar a informação que não é pertinente.
Na situação apresentada do Parque da Pena, determinar um percurso que torne o trabalho dos jovens o mais eficiente possível, leva-nos a identificar o essencial nos caminhos e nos cruzamentos; desta forma criou-se o modelo de grafo que figura na resposta à questão 2.1. onde os caminhos são representados por arestas e os cruzamentos por vértices. A realidade foi amplamente simplificada ao se esquecer de elementos como a fonte, os lagos, os jardins e o comprimento dos percursos.
Passou-se a ter uma visão do problema, agora centrada nos elementos essenciais.