Tema 4 – Exercícios globais (pág. 212)

1.1 Por exemplo: «diferença do número de pintas viradas para cima»
1.2 Por exemplo: «número de caras viradas para cima»
1.3 Por exemplo: «número de pontos obtidos»
1.4 Por exemplo: «produto dos pontos virados para cima»

2.1 «Sair ás de paus»
2.2 «Sair 11 de copas»
2.3 «Sair uma carta de copas, ouros, paus ou espadas»
2.4 «Sair um rei»

3.1 Para obtermos três faces comuns ao lançar quatro vezes uma moeda equilibrada, teremos as seguintes hipóteses:

C $\rightarrow$ Face comum N $\rightarrow$ Face nacional

CCCN, CCNC, CNCC, NCCC

Logo, *P*(obter exatamente três faces comuns) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = \frac{1}{4}$

3.2 Para obtermos duas faces comuns, temos várias hipóteses. Usando o acontecimento contrário, facilita a resolução do exercício porque temos menos casos a considerar.

P(pelo menos duas faces comuns) = 1 – *P*(no máximo uma face comum) =

= 1 – *P*(nenhuma face comum) – *P*(uma face comum) =

= $1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{11}{16}$

4.1 Podemos elaborar uma tabela de dupla entrada para melhor verificação dos resultados:

		Dado					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Moeda	***N***	(*N*, 1)	(*N*, 2)	(*N*, 3)	(*N*, 4)	(*N*, 5)	(*N*, 6)
	C	(*C*, 1)	(*C*, 2)	(*C*, 3)	(*C*, 4)	(*C*, 5)	(*C*, 6)

Logo: $\Omega = \{(N,\ 1),\ (N,\ 2),\ (N,\ 3),\ (N,\ 4),\ (N,\ 5),\ (N,\ 6),\ (C,\ 1),\ (C,\ 2),$
$(C,\ 3),\ (C,\ 4),\ (C,\ 5),\ (C,\ 6)\}$

4.2 $P(C,\ n.^{\text{o}}\ \acute{\imath}mpar) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

5.1 Podemos elaborar uma tabela de dupla entrada para melhor verificação dos resultados:

		Dado 1					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado 2	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

5.2 Sejam *N*: «nunca sair 5» e *D*: «saírem faces diferentes», queremos verificar se $P(N \cap D) = P(N) \times P(D)$:

$P(N) = \frac{36-11}{36} = \frac{25}{36}$ $\qquad$ $P(D) = \frac{36-6}{36} = \frac{5}{6}$

$P(N \cap D) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

$\frac{5}{9} = \frac{25}{36} \times \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{5}{9} = \frac{125}{216}$ $\qquad$ Falso

Logo, os acontecimentos não são independentes.

6.1 Consideremos os acontecimentos:

A: «ser do modelo A»

B: «ser do modelo B»

C: «ser do modelo C»

D: «ter menos de 25 anos»

E: «ter entre 25 e 45 anos»

F: «ter mais de 45 anos»

$P(E \cap A) = 15\%$

6.2 $P(B \cap \overline{F}) = 15\%$

6.3 $P(A \mid E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}12} = \frac{15}{37}$

6.4 $P(F \mid C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}17}{0{,}17 + 0{,}12 + 0{,}01} = \frac{17}{30}$

7. Consideremos os acontecimentos:

E: «ser eletrodoméstico»

R: «ser de recolha seletiva»

F: «ser de limpeza de florestas»

D: «ser de lixo doméstico»

Sabe-se que: $P(R)=\frac{20\ 000}{145\ 000}=\frac{4}{29}$; $P(F)=\frac{80\ 000}{145\ 000}=\frac{16}{29}$; $P(D)=\frac{45\ 000}{145\ 000}=\frac{9}{29}$;

$P(E \mid R)=0{,}96$; $P(E \mid F)=0{,}24$ e $P(E \mid D)=36\%$

Queremos determinar $P(R \mid E)$.

Usando a regra de Bayes, tem-se que:

$$P(R \mid E)=\frac{P(R\cap E)}{P(E)}=\frac{P(E \mid R)\times P(R)}{P(E \mid R)\times P(R)+P(E \mid F)\times P(F)+P(E \mid D)\times P(D)}=$$

$$=\frac{0{,}96\times\frac{4}{29}}{0{,}96\times\frac{4}{29}+0{,}24\times\frac{16}{29}+0{,}36\times\frac{9}{29}}=\frac{32}{91}$$

8. Consideremos os acontecimentos:

A: «o anúncio passar no canal A»

B: «o anúncio passar no canal B»

V: «o produto ser vendido»

Sabe-se: que $P(V \mid A)=0{,}2$; $P(V \mid B)=0{,}5$ e $P(A)=52\%$

8.1 $P(V)=P(V \mid A)\times P(A)+P(V \mid B)\times P(B)=0{,}2\times 0{,}52+0{,}5\times(1-0{,}52)=0{,}344=34{,}4\%$

8.2 Queremos determinar $P(B \mid \overline{V})$:

$$P(V \mid A)=0{,}2 \Leftrightarrow \frac{P(V\cap A)}{P(A)}=0{,}2 \Leftrightarrow P(V\cap A)=10{,}4\%$$

$$P(V \mid B)=0{,}5 \Leftrightarrow \frac{P(V\cap B)}{P(B)}=0{,}5 \Leftrightarrow P(V\cap B)=24\%$$

	V	***$\overline{V}$***	**Total**
A	10,4	41,6	52%
B	24	24	48%
Total	34,4%	65,6%	100%

Logo, $P(B \mid \overline{V})=\frac{P(B\cap\overline{V})}{P(\overline{V})}=\frac{0{,}24}{0{,}656}=\frac{15}{41}$

9. Consideremos os acontecimentos:

A: «a Ana embrulhar»

B: «a Belmira embrulhar»

C: «a Carla embrulhar»

L: «colocar o laço»

Sabe-se que: $P(A)=30\%$, $P(\overline{L} \mid A)=3\%$, $P(B)=20\%$, $P(\overline{L} \mid B)=8\%$,

$P(C)=100\%-30\%-20\%=50\%$ e $P(\overline{L} \mid C)=5\%$

9.1 Queremos determinar $P(\overline{L})$.

Usando o teorema da probabilidade total, temos:

$$P(\overline{L})=P(\overline{L} \mid A)\times P(A)+P(\overline{L} \mid B)\times P(B)+P(\overline{L} \mid C)\times P(C)=$$

$$=0{,}03\times 0{,}3+0{,}08\times 0{,}2+0{,}05\times 0{,}5=0{,}05=5\%$$

9.2 Queremos determinar $P(C \mid \overline{L})$.

$$P(C \mid \overline{L})=\frac{P(C\cap \overline{L})}{P(\overline{L})}=\frac{P(\overline{L} \mid C)\times P(C)}{0{,}05}=\frac{0{,}05\times 0{,}5}{0{,}05}=0{,}5=50\%$$

10.1 A percentagem de alunos que se autoavaliaram com «Muito Bom» é de 20% porque é o dobro da percentagem de alunos que responderam «Insuficiente».

Então, a percentagem de alunos que não responderam será:

$$100-(20+35+10+25)=10\%$$

10.2 A afirmação é falsa, porque não é verificada por qualquer amostra que satisfaça as condições apresentadas. Por exemplo:

Ordem do valor:	1.º ... 75.º	76.º ... 150.º	151.º ... 225.º	226.º ... 300.º
Valor:	14 ... 16	16 ... 17	17 ... 18	18 ... 19

10.3 O número de raparigas que desejam prosseguir estudos é 130 e o número total de inquiridos é 300. Logo, a probabilidade pedida é: $P=\frac{130}{300}=\frac{13}{30}$.

10.4 Consideremos os acontecimentos:

A: «apresentou a razão A»

B: «apresentou a razão B»

C: «apresentou a razão C»

X: «ser rapariga»

Sabe-se que: $P(A \mid X)=70\%$, $P(B \mid X)=20\%$, $P(B \mid \overline{X})=40\%$ e $P(C \mid \overline{X})=10\%$.

Queremos calcular $P(\overline{X} \mid A)$:

$$P(A \mid X)=0{,}7 \Leftrightarrow \frac{P(A\cap X)}{P(X)}=0{,}7 \Leftrightarrow P(A\cap X)=0{,}7\times\frac{130}{220} \Leftrightarrow P(A\cap X)=\frac{91}{220}$$

$$P(B \mid X)=0{,}2 \Leftrightarrow \frac{P(B\cap X)}{P(X)}=0{,}2 \Leftrightarrow P(B\cap X)=0{,}2\times\frac{130}{220} \Leftrightarrow P(B\cap X)=\frac{13}{110}$$

$$P\left(B \mid \overline{X}\right)=0{,}4 \Leftrightarrow \frac{P\left(B\cap\overline{X}\right)}{P\left(\overline{X}\right)}=0{,}4 \Leftrightarrow P\left(B\cap\overline{X}\right)=0{,}4\times\frac{90}{220} \Leftrightarrow P\left(B\cap\overline{X}\right)=\frac{9}{55}$$

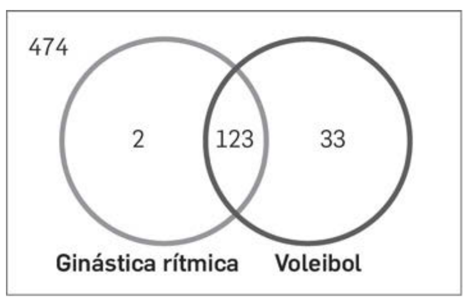
$$P\left(C \mid \overline{X}\right)=0{,}1 \Leftrightarrow \frac{P\left(C\cap\overline{X}\right)}{P\left(\overline{X}\right)}=0{,}1 \Leftrightarrow P\left(C\cap\overline{X}\right)=0{,}1\times\frac{90}{220} \Leftrightarrow P\left(C\cap\overline{X}\right)=\frac{9}{220}$$

Com estes dados, podemos construir a tabela:

	A	***B***	***C***	**Total**
X	$\frac{91}{220}$	$\frac{13}{110}$	$\frac{13}{220}$	$\frac{13}{22}$
$\overline{X}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{9}{22}$
Total	$\frac{34}{55}$	$\frac{31}{110}$	$\frac{1}{10}$	1

$$P\left(\overline{X} \mid A\right)=\frac{P\left(\overline{X}\cap A\right)}{P(A)}=\times\frac{\frac{9}{44}}{\frac{34}{55}}=\frac{45}{136}\approx 0{,}33$$

11.1



$632-474-125-156=123 \rightarrow$ colocaram dois X

Assim, $632-123=509$ alunos colocaram apenas um X.

11.2 A probabilidade de escolher pelo menos uma das modalidades pode ser definida por: $P(G\cup V)$, considerando os acontecimentos *G*: «escolher ginástica rítmica» e *V*: «escolher voleibol»

$$P(G\cup V)=P(G)+P(V)-P(G\cap V)=\frac{125}{632}+\frac{156}{632}-\frac{123}{632}=\frac{158}{632}=\frac{1}{4}$$

11.3 Consideremos o acontecimento *O*: «escolher outra».

Queremos calcular $P\left(G \mid \overline{O}\right)$.

Sabe-se que: $P(O)=\frac{474}{632}=\frac{3}{4}$, logo, $P\left(\overline{O}\right)=\frac{1}{4}$.

$$P\left(G \mid \overline{O}\right)=\frac{P\left(G\cap\overline{O}\right)}{P\left(\overline{O}\right)}=\frac{\frac{125}{632}}{\frac{1}{4}}=\frac{125}{158}\approx 79{,}11\%$$

12. Consideremos os acontecimentos:

C: «a produção ser de centeio»

M: «a produção ser de milho»

T: «a produção ser de trigo»

I: «ser transacionada no mercado interno»

Sabe-se que: $P(C)=23\%$, $P\left(M\cap\overline{I}\right)=\dfrac{11\ 960}{92\ 000}=13\%$, $P(I\mid C)=\dfrac{1}{4}$,

$P(T)=\dfrac{11\ 040}{92\ 000}=\dfrac{3}{25}=12\%$ e $P(I\mid T)=50\%$

12.1

	C	*M*	*T*	Total
$\overline{I}$ (M. externo)	17,25%	13%	6%	36,25%
I (M. interno)	5,75%	52%	6%	63,75%
Total	23%	65%	12%	100%

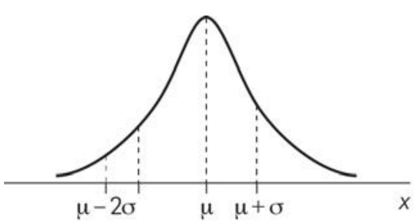
$$P(I\mid C)=25\%\Leftrightarrow\frac{P(I\cap C)}{P(C)}=0{,}25\Leftrightarrow P(I\cap C)=0{,}25\times0{,}23\Leftrightarrow P(I\cap C)=5{,}75\%$$

$$P(I\mid T)=0{,}5\Leftrightarrow\frac{P(I\cap T)}{P(T)}=0{,}5\Leftrightarrow P(I\cap T)=0{,}5\times0{,}12\Leftrightarrow P(I\cap T)=0{,}06\Leftrightarrow P(I\cap T)=6\%$$

12.2 *X*: «massa, em quilogramas, de uma saca de cereais escolhida ao acaso de entre as sacas que, por dia, são embaladas numa determinada fábrica»

$\mu=1000$ $\sigma=16$

$P(968<X<1016)$ corresponde a $P(\mu-2\sigma<X<\mu+\sigma)$



Logo, a probabilidade pedida é:

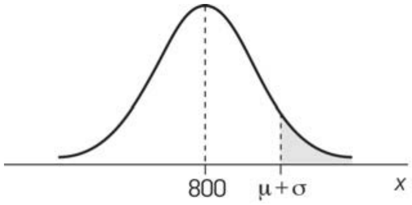
$$68{,}27\%+\left(\frac{95{,}45-68{,}27}{2}\right)=81{,}86\%$$

13.1 A capacidade do depósito é 2000 litros.

X ~ N(800, 40), ou seja, $\mu=800$ e $\sigma=40$.

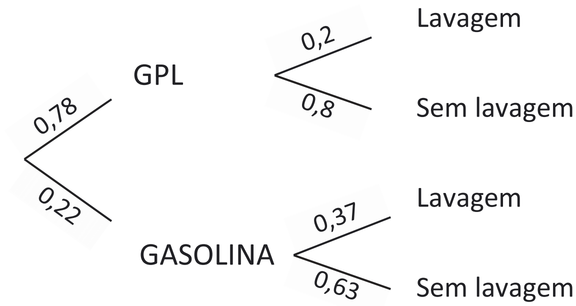
42% da capacidade do depósito: $0{,}42\times2000=840$ litros

Seja *X* a variável «quantidade de GPL no depósito», queremos saber $P(X>840)$, ou seja, $P(X>\mu+\sigma)$.



$$P(X>840)=50-\frac{68{,}27}{2}=15{,}865\%$$

13.2 Podemos recorrer a um diagrama em árvore para resolver o problema.



Consideremos os acontecimentos:

G: «abastecer os veículos de gasolina»

L: «abastecer com lavagem»

Pretende-se calcular $P(G\,|\,L)=\dfrac{0,22\times0,37}{0,22\times0,37+0,78\times0,2}\approx0,3429=34,29\%$

13.3 Consideremos os acontecimentos:

S: «ter sensores de estacionamento»

G: «ter gancho de reboque»

Sabe-se que: $P(S)=50\%$, $P(G)=60\%$ e $P(\overline{S}\cap\overline{G})=15\%$

$P(\overline{S}\cap\overline{G})=0,15 \Leftrightarrow P(\overline{S\cup G})=0,15 \Leftrightarrow P(S\cup G)=1-0,15 \Leftrightarrow P(S\cup G)=85\%$

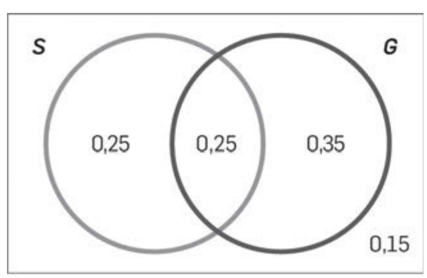
$P(S\cup G)=P(S)+P(G)-P(S\cap G) \Leftrightarrow 0,85=0,5+0,6-P(S\cap G) \Leftrightarrow P(S\cap G)=0,25$

Pelo que: $P(A)=25\%$

$$P(B)=P(G\cap\overline{S})=P(G)-P(G\cap S)=0,6-0,25=0,35=35\%$$

Podemos concluir que *B* é mais provável do que *A*.

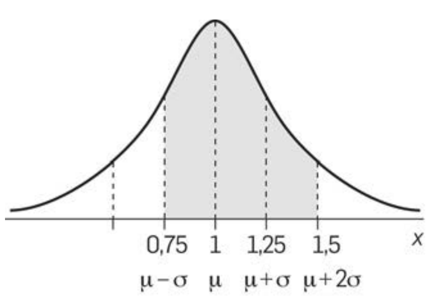
Poderíamos também ter construído um diagrama de Venn.



14.1 Seja *X* a variável aleatória «índice de cada estabelecimento comercial»

X ~ N (1; 0,25)

Queremos calcular $P\left(\dfrac{3}{4}<X<\dfrac{3}{2}\right)$, o que corresponde a $P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)$



$P(0,75<X<1,5)=$

$=95,45\%-\left(\dfrac{95,45\%-68,27\%}{2}\right)=$

$=81,86\%$

14.2 $P\left(1 < X < \dfrac{3}{2}\right)$ equivale a $P(\mu < X < \mu + 2\sigma)$

Sabe-se que: $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 95,45\%$

Logo, $P\left(1 < X < \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{95,45\%}{2} = 47,725\%$

Em três estabelecimentos, apenas dois apresentam índices pertencentes a $\left]1, \dfrac{3}{2}\right[$, ou seja, a probabilidade pedida é:

$$0,47725 \times 0,47725 \times (1 - 0,47725) \times 3 = 35,72\%$$

$(I\,\overline{I}\,I)$, $(\overline{I}\,I\,I)$ ou $(I\,I\,\overline{I})$

14.3 Consideremos os acontecimentos:

A: «o índice da empresa estar compreendido entre 0,5 e 1,5»

B: «procurar informação sobre a abertura de novas empresas comerciais»

$\overline{B}$: «efetuar pagamento»

Sabe-se que: $P(B) = \dfrac{3}{8}$; $P(A \mid B) = 0,82$; $P(A \mid \overline{B}) = 0,30$ e $P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$

$$P(A) = P(A \mid B) \times P(B) + P(A \mid \overline{B}) \times P(\overline{B}) = \frac{3}{8} \times 0,82 + \frac{5}{2} \times 0,30 = \frac{99}{200}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8} \times 0,82}{\frac{99}{200}} = \frac{41}{66}$$

15.1 Seja *X* a variável «classificação atribuída»

x_i	9	10	14	15	16	18	19
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{3}{23}$

Número total de alunos da turma: $2 + 3 + 5 + 1 + 4 + 5 + 3 = 23$

15.2 $\mu = 9 \times \dfrac{2}{23} + 10 \times \dfrac{3}{23} + 14 \times \dfrac{5}{23} + \ldots + 19 \times \dfrac{3}{23} = 14,96$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{23}(9 - 14,96)^2 + \frac{3}{23}(10 - 14,96)^2 + \ldots + \frac{3}{23}(19 - 14,96)^2} = 3,29$$

Podemos obter estes resultados usando a calculadora.

15.3.1 $P(X < 14) = \dfrac{2}{23} + \dfrac{3}{23} = \dfrac{5}{23}$

15.3.2 $P(10 \leq X \leq 16) = \dfrac{3}{23} + \dfrac{5}{23} + \dfrac{1}{23} + \dfrac{4}{23} = \dfrac{13}{23}$

15.3.3 $P(X > 15) = \dfrac{4}{23} + \dfrac{5}{23} + \dfrac{3}{23} = \dfrac{12}{23}$

16. Consideremos a variável aleatória *X*: «número de filhos do casal»

Considerando que o casal tem quatro filhos, o modelo de probabilidade será:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 6$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$

Ou seja:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

16.1 Usando a calculadora, obtemos:

$\mu=2$ e $\sigma=1$

16.2 A probabilidade de ter três crianças do mesmo género é $\frac{1}{4}$ e a probabilidade de ter duas crianças de cada género é $\frac{3}{8}$, logo, é mais provável ter duas crianças de cada género.

17.1.1 $P(X=0)=e^{-2}\times\frac{2^0}{0!}=e^{-2}=0{,}135$

17.1.2 $P(X=10)=e^{-2}\times\frac{2^{10}}{10!}=0{,}0000382$

17.1.3 $P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-0135-e^{-2}\times 2=0{,}59$

17.2.1 $\lambda=5\times 2=10$

$P(X=20)=e^{-10}\times\frac{10^{20}}{20!}=0{,}002$

17.2.2 $P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-e^{-10}\times 10-e^{-10}\times 10=0{,}9995$

18.1 Modelo uniforme.

18.2 $E(X)=\frac{40+55}{2}=47{,}5$

18.3.1 $P(X>47)=1-P(X\leq 47)=1-P(40\leq X\leq 47)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$

18.3.2 $P(X<35)=0$

18.3.3 $P(45<X<50)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

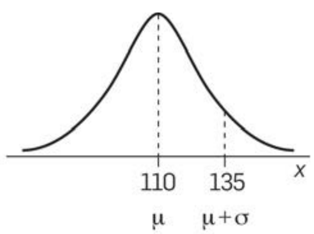
19. $E(X)=20$ e $\lambda=\frac{1}{20}=0{,}05$

19.1 $P(X<25)=P(0<X<25)=e^{-0{,}05\times 0}-e^{-0{,}05\times 25}=0{,}71$

19.2 $P(X>60)=1-P(X\leq 60)=1-\left(e^{0}-e^{-0{,}05\times 60}\right)=0{,}05$

20. $\mu=110$ e $\sigma=25$

20.1.1 $P(X>135)=50\%-\frac{68{,}27\%}{2}=15{,}865\%$



20.1.2 $P(X<75)$

X ~ N (110, 25)

$U=\frac{X-110}{25}\Leftrightarrow 25U+110=X$

$25U+110<75\Leftrightarrow 25U<-35\Leftrightarrow U<-1{,}4$

$P(X<75)=P(U<-1{,}4)=P(U>1{,}4)=0{,}5-P(0<U<1{,}4)=0{,}5-\left(\phi(1{,}4)-\phi(0)\right)=$

$=0{,}5-(0{,}9192-0{,}5)=1-0{,}9192=0{,}0808$

20.2 $P(90<X<145)$

$$\begin{cases}25U+110>90\\25U+110<145\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25U-20\\25U<35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}U>-0{,}8\\U<1{,}4\end{cases}$$

$P(-0{,}8<U<1{,}4)=\phi(1{,}4)-\phi(-0{,}8)=\phi(1{,}4)-1+\phi(-0{,}8)=0{,}7073$

Tema 4 – Teste final (pág. 218)

1.1.1 Para definirmos o espaço de resultados, podemos elaborar uma tabela de dupla entrada.

	2	**5**	**10**	**50**
2	(2, 2)	(2, 5)	(2, 10)	(2, 50)
5	(5, 2)	(5, 5)	(5, 10)	(5, 50)
10	(10, 2)	(10, 5)	(10, 10)	(10, 50)
50	(50, 2)	(50, 5)	(50, 10)	(50, 50)

Ω = {(2, 2), (2, 5), (2, 10), (2, 50), (5, 2), (5, 5),(5, 10), (5, 50), (10, 2)(10, 5), (10, 10), (10, 50), (50, 2), (50, 5), (50, 10), (50, 50)}