

TEMA 3- EXERCÍCIOS GLOBAIS

RESOLUÇÕES

Mais ABAIXO

|
|

Tema 3 – Exercícios globais (pág. 116)

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1. B | 3. B | 5. A | 7. A | 9. D |
| 2. C | 4. B | 6. C | 8. C | 10. D |

11.1 Apenas existe no grafo D, pois é o único onde todos os vértices têm grau par.

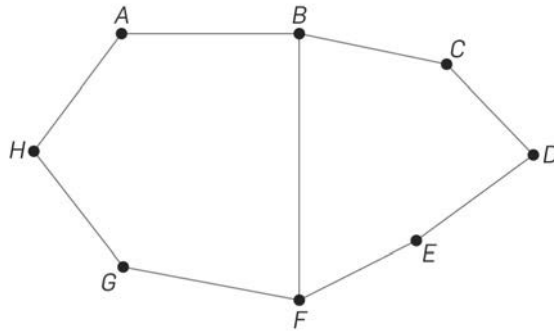
11.2 A: duplicar a aresta AE

B: duplicar as arestas DG e GH

C: duplicar as arestas AE e BC

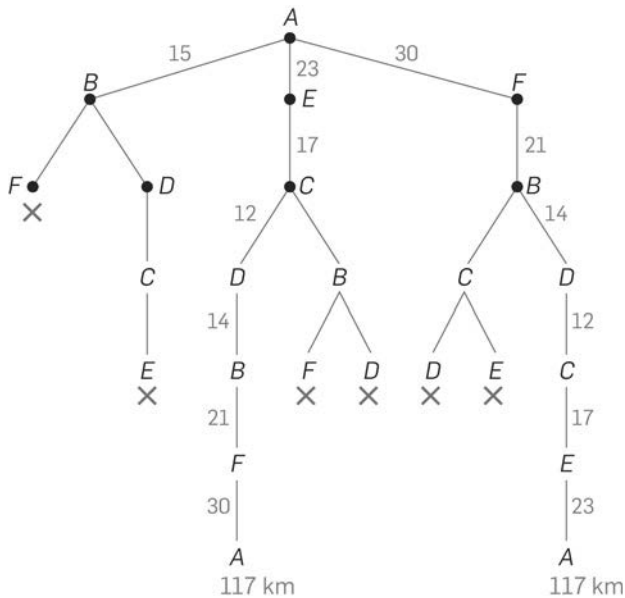
12. A – É possível: $A B C F E D A$
 B – Não é possível
 C – É possível: $A B C D E A$
 D – Não é possível

13.



Por exemplo: tem um circuito hamiltoniano ($A B C D E F G H A$), mas não tem circuito euleriano, pois tem, pelo menos, um vértice de grau ímpar (B e F).

14.1

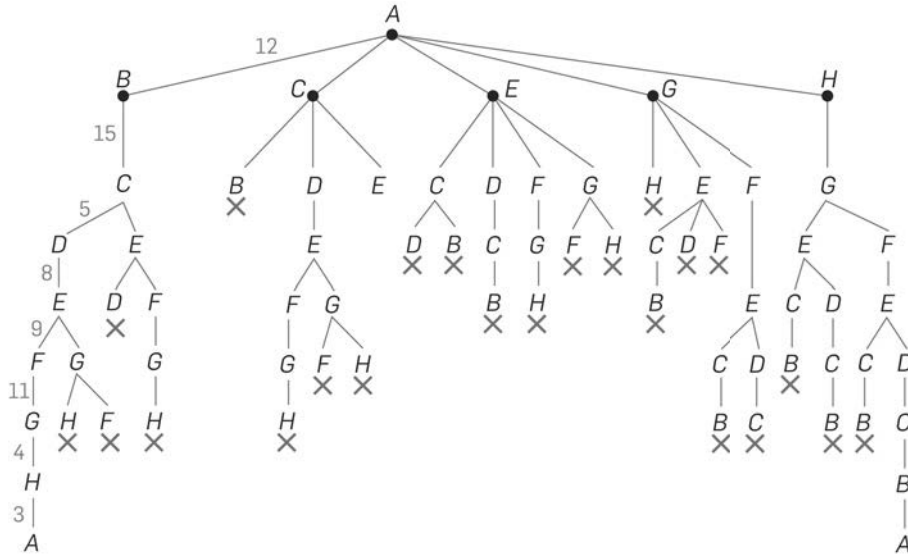


Só há dois percursos possíveis e inversos: $A E C D B F A$ ou $A F B D C E A$, com um total de 117 quilómetros.

- 14.2 $B \xrightarrow{14} D \xrightarrow{12} C \xrightarrow{17} E \xrightarrow{23} A \xrightarrow{30} F$ 96 km
 $C \xrightarrow{12} D \xrightarrow{14} B \xrightarrow{21} F \xrightarrow{30} A \xrightarrow{23} E$ 94 km
 $D \xrightarrow{12} C \xrightarrow{17} E \xrightarrow{23} A \xrightarrow{30} F \xrightarrow{21} B$ 103 km
 $E \xrightarrow{17} C \xrightarrow{12} D \xrightarrow{14} B \xrightarrow{21} F \xrightarrow{30} A$ 94 km
 $F \xrightarrow{21} B \xrightarrow{14} D \xrightarrow{12} C \xrightarrow{17} E \xrightarrow{23} A$ 87 km

Escolheria a escola A ou F (87 quilómetros, não tendo de regressar à primeira escola).

15.1



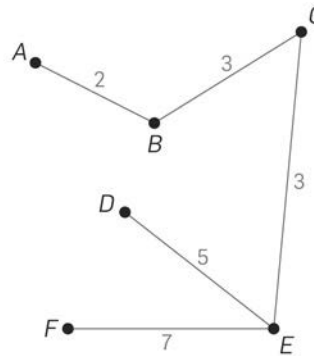
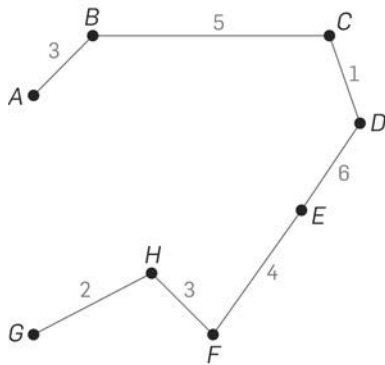
Só há dois percursos possíveis e são inversos: $A B C D E F G H A$ e $A H G F E D C B A$.

15.2 Ambos têm 67 unidades de comprimento.

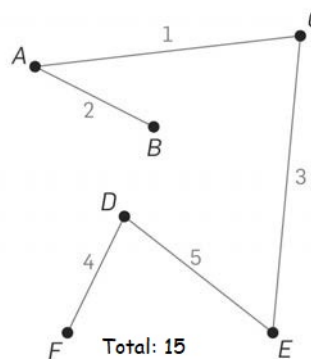
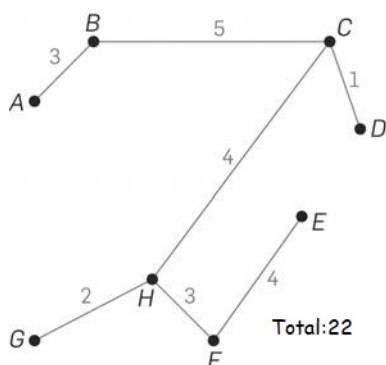
- 15.3
- $A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A:$ 67
 - $B \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B:$ 67
 - $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C:$ 67
 - $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D:$ 67
 - $E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E:$ 67
 - $F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F:$ 67
 - $G \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G:$ 67
 - $H \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H:$ 67

Partindo de qualquer vértice, a distância total é sempre igual a 67.

16.1 Por exemplo:



16.2 Por exemplo:



17.1 No grafo existem dois vértices de grau ímpar (C e F têm grau 3), logo, não é possível encontrar um circuito de Euler. Assim, as pretensões do António não podem ser todas satisfeitas.

17.2 Consideremos os pesos das arestas sugeridas pelo João e a respetiva soma:

$$AB - FG - BF - BE - CE - CD$$

$$1253 + 832 + 938 + 712 + 941 + 911 = 5587 \text{ metros}$$

Aplicando o algoritmo proposto pelo João:

Passo 1: as arestas com menor peso são $BE - 712$ e $FG - 832$.

Passo 2: a aresta seguinte com menor peso e que não fecha circuito é $CD - 911$.

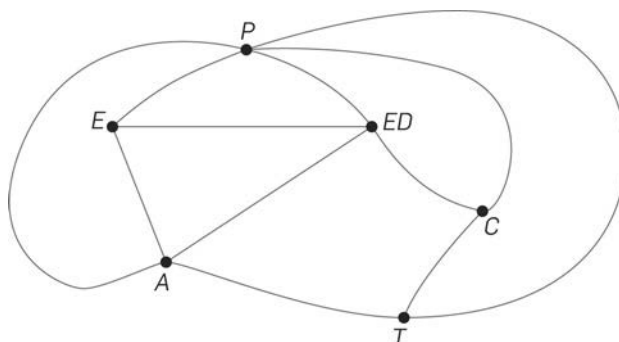
Passo 3: segue-se a aresta $BF - 938$, depois a aresta $EC - 941$ e, por fim, a aresta $AG - 1248$.

O comprimento total para a proposta do João é:

$$712 + 832 + 911 + 938 + 941 + 1248 = 5582 \text{ metros}$$

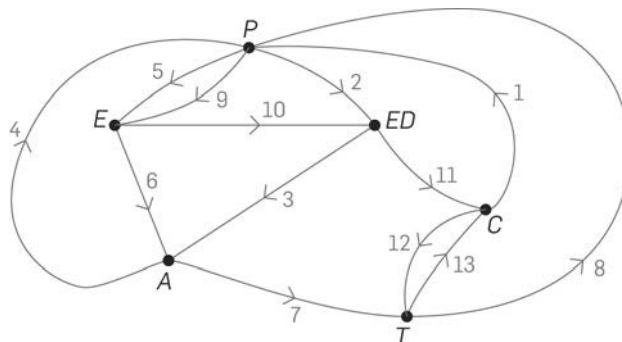
Assim, a empresa deverá optar pela proposta do João, pois utiliza menos 5 metros de fibra ótica do que a proposta do José.

18. Um grafo representativo desta planta terá como vértices cada um dos espaços do recinto; as arestas serão as ligações existentes entre cada um desses espaços («as portas»). Para simplificar, vamos identificar cada vértice pela(s) primeira(s) letra(s) do espaço que representa: por exemplo, P representa o pátio:



Os vértices C , E , P e T têm grau ímpar, o que inviabiliza a existência de um circuito de Euler, o qual seria necessário para a ronda ao recinto que a funcionária pretendia. Para solucionar o problema, teremos de eulerizar o grafo, isto é, duplicar o menor número de arestas de modo a que todos os vértices fiquem com grau par. Conseguimos uma boa eulerização duplicando as arestas TC e PE , passando os vértices T , C , P e E a ter grau par, como os restantes.

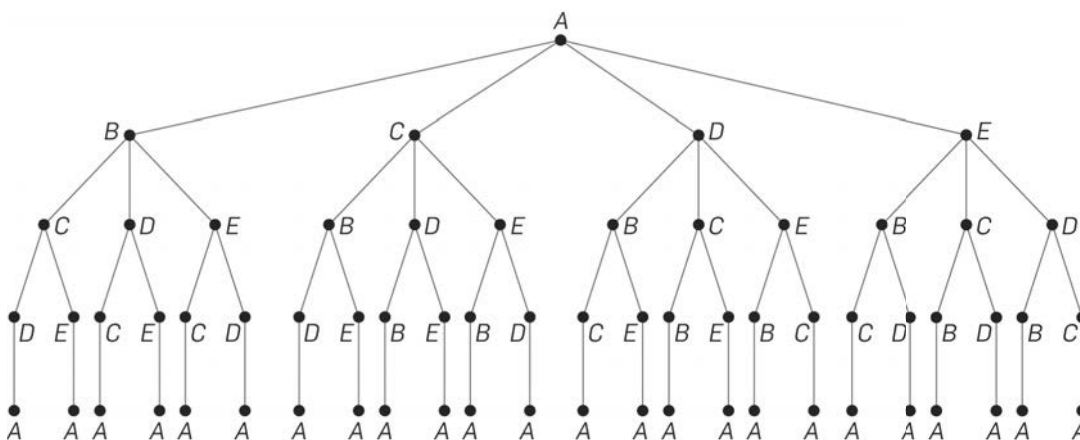
A ronda pretendida para a funcionária pode ser, por exemplo:



$C - P - ED - A - P - E - A - T - P - E - ED - C - T - C$

19.1 São seis os percursos que começam em A e seguem de imediato para D:
A D E C B; A D E B C; A D B C E; A D B E C; A D C E B; A D C B E

19.2 Podemos fazer um diagrama em árvore para mais facilmente contar os percursos possíveis:



Contámos 24 percursos. No entanto, como para cada um existe o percurso no sentido contrário (*A B C D E A* é idêntico a *A E D C B A*, em número de quilómetros), existem $24 : 2 = 12$ voltas distintas que podem fazer parte da lista do Miguel.

20. 1.º caso: a estrada que liga A a B está transitável.

Algoritmo: 1.º passo: seleciona-se F.
 2.º passo: seleciona-se A (mais próxima).
 3.º passo: seleciona-se B, de seguida D, depois C e regressamos a F.

Distância total: $18 + 28 + 32 + 48 + 20 = 146$ km

2.º caso: a estrada que liga A a B está intransitável.

Algoritmo: 1.º passo: seleciona-se F.
 2.º passo: seleciona-se A (mais próxima).
 3.º passo: seleciona-se D (não pode ser B porque está intransitável), de seguida B, depois C e regressamos a F.

Distância total: $18 + 30 + 32 + 36 + 20 = 136$ km

A afirmação constante do anúncio é falsa, pois a distância total a percorrer caso a estrada que liga A a B esteja intransitável é inferior (em 10 quilómetros) e não superior.

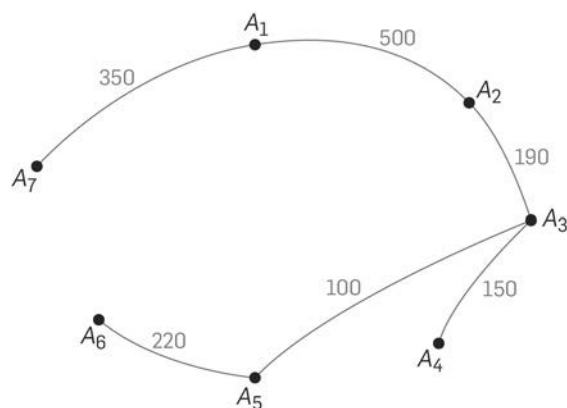
21. Começamos por ordenar por ordem crescente as distâncias entre cada par de pavilhões:

$$A_3 \text{---}_{100}\text{---} A_5; A_3 \text{---}_{150}\text{---} A_4; A_2 \text{---}_{190}\text{---} A_3; A_2 \text{---}_{200}\text{---} A_5; A_4 \text{---}_{220}\text{---} A_5;$$

$$A_5 \text{---}_{220}\text{---} A_6; A_4 \text{---}_{240}\text{---} A_6; A_2 \text{---}_{340}\text{---} A_6; A_1 \text{---}_{350}\text{---} A_7; A_1 \text{---}_{500}\text{---} A_2;$$

$$A_6 \text{---}_{650}\text{---} A_7; A_1 \text{---}_{730}\text{---} A_6$$

O grafo, nas condições impostas, será:



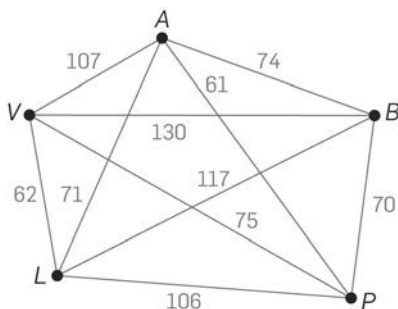
Uma vez selecionadas $7 - 1 = 6$ arestas, calculamos o comprimento total de cabo de fibra ótica:

$$100 + 150 + 190 + 220 + 350 + 500 = 1510 \text{ metros}$$

O custo mínimo para a instalação será:

$$1510 \times 3,40 = 5134 \text{ €}$$

22. Um grafo ponderado representativo da situação pode ser (os vértices estão designados pela primeira letra de cada cidade):



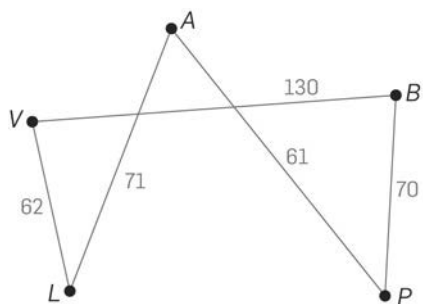
Vamos aplicar cada uma das opções para saber se o Luís tem razão ou não.

Opção 1: $A \text{---}_{61}\text{---} P \text{---}_{70}\text{---} B \text{---}_{117}\text{---} L \text{---}_{62}\text{---} V \text{---}_{107}\text{---} A$

$$\text{Distância total: } 61 + 70 + 117 + 62 + 107 = 417 \text{ km}$$

Opção 2: $A \text{---}_{31}\text{---} P; L \text{---}_{62}\text{---} V; B \text{---}_{70}\text{---} P; A \text{---}_{71}\text{---} L; A \text{---}_{74}\text{---} B; P \text{---}_{75}\text{---} V;$

$$P \text{---}_{106}\text{---} L; A \text{---}_{107}\text{---} V; B \text{---}_{117}\text{---} L; B \text{---}_{130}\text{---} V$$

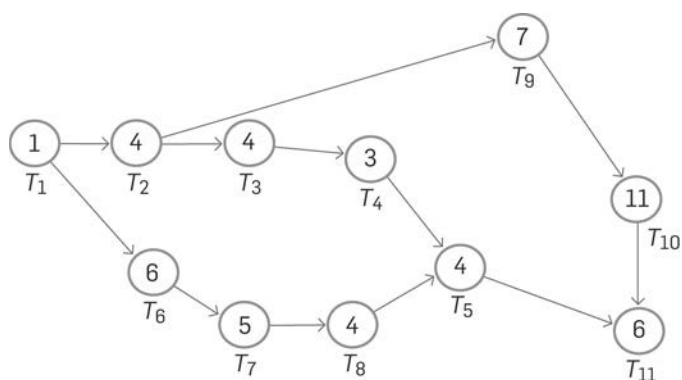


Distância total: $61 + 62 + 70 + 71 + 130 = 394$ km

Percurso: $A - P - B - V - L - A$ (ou o inverso)

O Luís não tem razão.

23.1



23.2 O António demora $1 + 4 + 7 + 11 + 6 = 29$ dias a concluir o projeto, pelo que cumpre o prazo estipulado.

23.3 O caminho crítico para este projeto é $T_1 - T_2 - T_9 - T_{10} - T_{11}$.

24.1 $6 + 2 \times 2 = 10$ €

24.2 $6 + 14 \times 2 = 34$ €

24.3 $P(h) = 6 + 2(h-1)$, $h \in \mathbb{N}$

25.1 $C_5 = 10\,000 + 5 \times 10\,000 \times 0,1 = 15\,000$ €

Rendeu $15\,000 - 10\,000 = 5000$ €

25.2 $50\,000 = 10\,000 + n \times 10\,000 \times 0,1 \Leftrightarrow 1000n = 40\,000 \Leftrightarrow n = 40$

Ao fim de 40 anos.

25.3 $50\,000 = 10\,000 \times 1,10^n \Leftrightarrow 1,10^n = 5 \Leftrightarrow n \approx 16,88631$

Ao fim de, aproximadamente, 17 anos.

26. $P(20) = 6000 \times 0,92^{20} \approx 1132,16$

Terá cerca de 1132 habitantes.

27. $2000 = V_0 \times 1,10^3 \Leftrightarrow V_0 \approx 1502,629602$

Ganhava cerca de 1502,63 €.

28.1 $P_N(n) = 30\,000 \times 1,12^{\frac{n}{10}}, n$ anos

$$P_P(n) = 50\,000 \times 1,07^{\frac{n}{10}}$$

28.2 $30\,000 \times 1,12^{\frac{n}{10}} = 50\,000 \times 1,07^{\frac{n}{10}} \Leftrightarrow \left(\frac{1,12}{1,07}\right)^{\frac{n}{10}} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{n}{10} = 11,185 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = 111,85 \Leftrightarrow n \approx 112$$

Ao fim de, aproximadamente, 11 décadas a população dos dois concelhos é igual.

29.1 $V_x = 1200 \times 12 = 14\,400$ € 1 ano

$$V_y = 1000 \times 12 = 12\,000$$
 €

Deve escolher a empresa X.

29.2 $V_x = 14\,400 + 12 \times 1450 = 31\,800$ €

$$V_y = 12\,000 + 12 \times 1300 = 27\,600$$
 €

Deve escolher a empresa X.

29.3 $V_x = 12(1200 + 1450 + 1700 + 1950 + 2200) = 102\,000$ €

$$V_y = 12(1000 + 1300 + 1690 + 2197 + 2856,1) = 108\,517,2$$
 €

Deve escolher a empresa Y.

30.1 $M_A(4) = 1000 \times 1,015^4 \approx 1061,36$ €

$$M_B(4) = 1000 + 4 \times 0,017 \times 1000 \approx 1068$$
 €

A modalidade B é mais vantajosa.

30.2 $1000 \times 1,015^n > 1000(1 + 0,017n) \Leftrightarrow 1,015^n > 1 + 0,017n \Leftrightarrow n > 17,43746$

(calculadora gráfica)

A partir do 18.º ano, a modalidade A passa a ser mais vantajosa.

31.1 Parque A: $0,8 + 1,1 + 1,4 = 3,3$ €

$$\text{Parque B: } 0,8 + 0,8 + 1,3 + 0,8 \times 1,3^2 = 3,192$$
 €

31.2 5 horas: $P_A: 3,3 + 1,7 + 2 = 7$ €

$$P_B: 3,192 + 0,8(1,3^3 + 1,3^4) \approx 4,04$$
 €

6 horas: $P_A: 7 + 2,3 = 9,3$ €

$$P_B: 4,04 + 0,8 \times 1,3^5 \approx 7,75$$
 €

7 horas: $P_A: 9,3 + 2,6 = 11,9 \text{ €}$
 $P_B: 7,75 + 0,8 \times 1,3^6 \approx 11,61 \text{ €}$

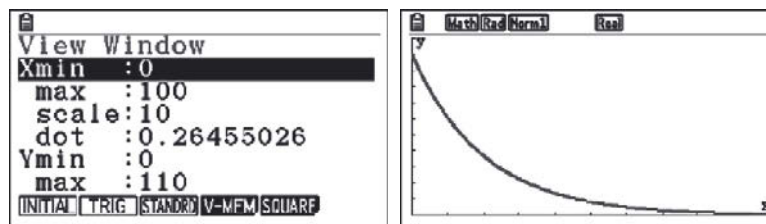
8 horas: $P_A: 11,9 + 2,9 = 14,8 \text{ €}$
 $P_B: 11,61 + 0,8 \times 1,3^7 \approx 16,63 \text{ €}$

Se o carro estiver no parque oito horas ou mais, compensa ficar no Parque A.

32.1 $M(0) = 100 \times e^{-0,05 \times 0} = 100 \text{ mg}$

32.2 $M(3) = 100 \times e^{-0,05 \times 3} \approx 86,07079764 \approx 86,07 \text{ mg}$

32.3 Gráfico (calculadora)



32.4 O elemento tende a desintegrar-se completamente.

33.1 $g(0) = \frac{100}{1 + e^0} = \frac{100}{2} = 50 \text{ centenas} = 5000 \text{ gafanhotos}$

33.2 $g(10) = \frac{100}{1 + e^{-0,03 \times 10}} = \frac{100}{e^{-0,3}} \approx 57,4425$

Haverá cerca de 57,44 centenas de gafanhotos.

33.3 À medida que o número de dias aumenta, o número de gafanhotos tende a aumentar, aproximando-se das 100 centenas.

34.1 $\log 100 = \log 10 + 0,7 \log m \Leftrightarrow 2 = 1 + 0,7 \log m \Leftrightarrow \log m = \frac{10}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = 10^{\frac{10}{7}} \approx 26,83 \text{ gramas}$

34.2 $\log x = \log 10 + 0,7 \log 300 \Leftrightarrow \log x = 1 + 0,7 \log 300 \Leftrightarrow \log x \approx 2,733984878 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \approx 10^{2,734} \approx 541,98 \text{ microlitros}$

35. Seja C_0 o dinheiro que recebeu quando completou o Ensino Secundário. Com uma taxa de juro anual de 1,50%, ao fim de:

- um ano, o Dinis terá $100 + 1,5 = 101,50\%$ de C_0 , isto é, terá $C_0 \times 1,0150$

- dois anos, terá $C_0 \times 1,0150 \times 1,0150 = C_0 \times 1,0150^2$

...

- seis anos, terá $C_0 \times 1,0150^6 = 1530,82 \Leftrightarrow C_0 \approx 1400 \text{ €}$

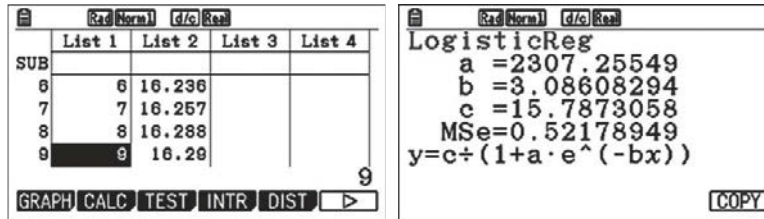
O Dinis recebeu 1400 € quando terminou o Ensino Secundário.

36.1 $N(6) = 4,8 \times 3^{0,15 \times 6} \approx 12,902$

$N(5) = 4,8 \times 3^{0,15 \times 5} \approx 10,942$

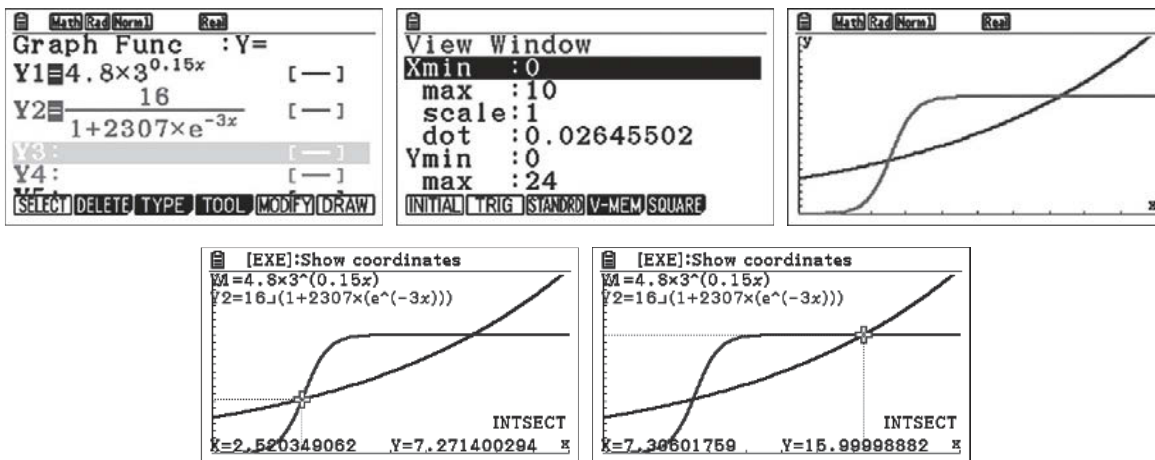
$N(6) - N(5) = 1,96$, o que significa que, entre o quinto e o sexto mês, as vendas de telemóveis aumentaram cerca de 1,96 milhares.

36.2 $V(t)$ é um modelo logístico, pelo que, com o auxílio da calculadora:



$a \approx 2307,26$; $b \approx 3,09$ e $c \approx 15,79$

36.3 Podemos observar, com o auxílio da calculadora, o gráfico das duas funções (N a azul e V a vermelho), com a janela de visualização utilizada:



De facto, é verdade que, até ao final do segundo mês, o número N de telemóveis vendidos é maior do que o número V de computadores, uma vez que a curva representativa de N se encontra acima da curva representativa de V . A partir do terceiro mês, e até aproximadamente o final do sétimo, o número V de computadores vendidos é superior ao de telemóveis vendidos. A partir do oitavo mês, a representação gráfica da função N fica acima da representação gráfica de V . Logo, o número de telemóveis vendidos volta a ser superior. Assim, a afirmação é falsa.

37.1 $C_n = C + C \times n \times i$

$1680 = 1500 + 3000i \Leftrightarrow i = \frac{180}{3000} \Leftrightarrow i = 0,06$

A taxa de juro trimestral é de 6%.

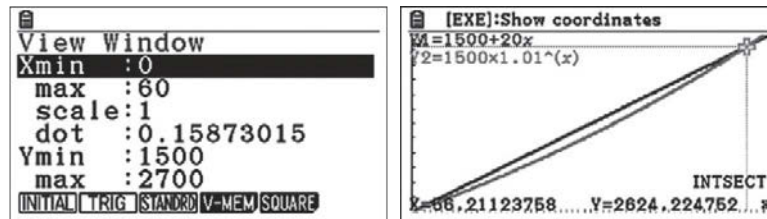
- 37.2** Ao analisar o capital no final de cada mês da conta X , verificamos que a variação é constante, pois de um mês para o seguinte aumenta 20 €, o que nos leva a optar por um modelo linear:

$$y = 1500 + 20x$$

Analisando a conta Y , verificamos que o capital no final de cada mês é 1,01 vezes maior do que no mês anterior, o que corresponde a um aumento mensal de 1%. Assim, leva-nos a optar por um modelo exponencial:

$$y = 1500 \times 1,01^x$$

Usando a calculadora gráfica para uma visualização simultânea das duas funções:



Podemos verificar que, no final do mês 56, o montante existente na conta Y ainda não era superior ao da conta X , mas, no final do mês 57, este facto já se verificava. Logo, a Carla tem razão na afirmação que fez.

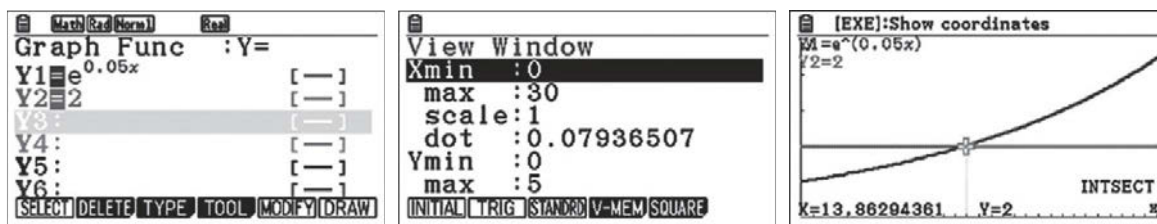
37.3
$$N(10) = \frac{30}{1 + 16 \times e^{-1,15 \times 10}} \approx 29,995$$

O número de aplicações feitas é de cerca de 30.

38.1
$$P(0) = 1800 \times e^{0,05 \times 0} \approx 1800$$

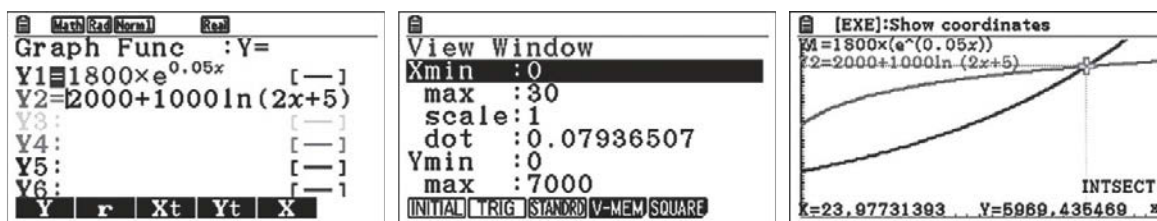
$$P(t) = 2 \times 1800 \Leftrightarrow e^{0,05t} = 2$$

Recorrendo à calculadora gráfica:



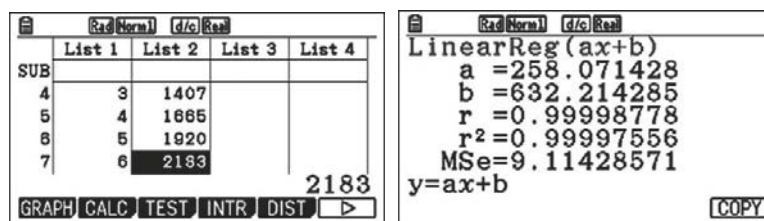
Serão necessários cerca de 14 anos para que o número de habitantes de Peso duplique.

- 38.2** Recorremos mais uma vez às potencialidades gráficas da calculadora, agora para resolver a condição $P(t) > N(t) \Leftrightarrow 1800 \times e^{0,05t} > 2000 + 1000 \ln(2t + 5)$:



Serão necessários cerca de 24 anos para que o número de habitantes de Peso seja superior ao de Neiva.

38.3 Mais uma vez, utilizamos a calculadora gráfica, agora para determinar uma regressão linear:



Obtemos: $R(t) = 258,07x + 632,21$

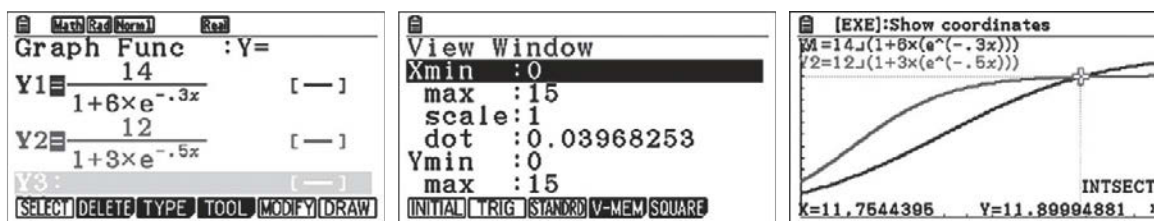
A data 1 de junho de 2012 corresponde a $t = 12$. Logo, $R(12) = 258,07 \times 12 + 632,21 = 3729,05$, isto é, a 1 de junho de 2012, o número de habitantes de Runa deveria ser, aproximadamente, 3729.

39.1 $f(0) = \frac{14}{1 + 6 \times e^{-0,3 \times 0}} = \frac{14}{7} = 2$ milhares

$g(0) = \frac{12}{1 + 3 \times e^{-0,5 \times 0}} = \frac{12}{4} = 3$ milhares

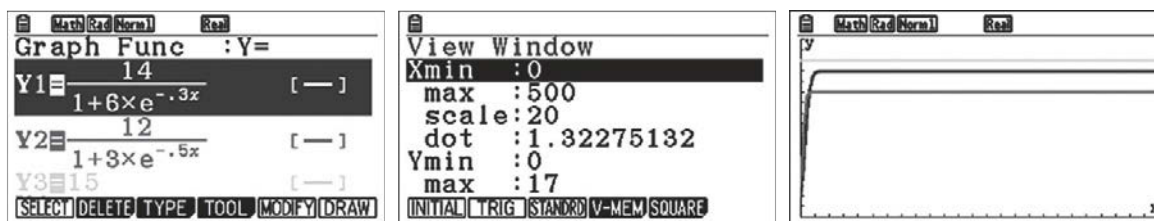
O álbum mais vendido em pré-venda foi o G.

39.2 Recorrendo à calculadora gráfica:



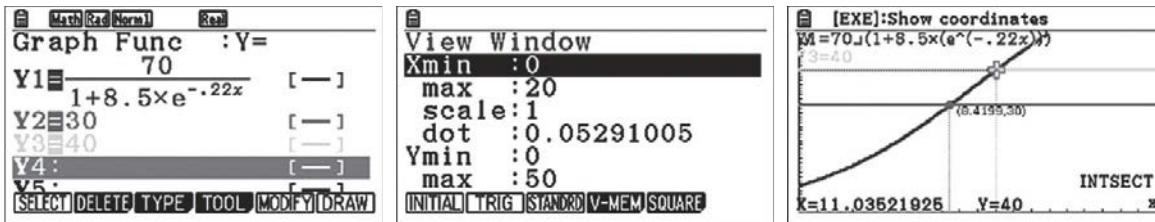
Decorreram cerca de 12 meses.

39.3 Colocando as funções no editor da calculadora e escolhendo uma janela adequada (com um valor de t entre 0 e 500):



Podemos concluir, com alguma segurança, que nenhum dos álbuns será galardoado com o Disco de Platina.

- 40.1 Vamos utilizar a calculadora para determinar a idade da Laura quando atingiu os 30 e os 40 quilogramas.



Concluimos que a Laura atingiu os 30 quilogramas aos 8,4199 anos e os 40 quilogramas aos 11,0352 anos.

Uma vez que $11,0352 - 8,4199 = 2,6153$ (2 anos) e $12 \times 0,6153 = 7,3836$ (7 meses), durante cerca de dois anos e sete meses, o peso da Laura situou-se entre os 30 e os 40 quilogramas.

- 40.2 Como nasceu a 1 de junho de 1998, no dia 1 de junho de 2012, a Laura fez 14 anos.

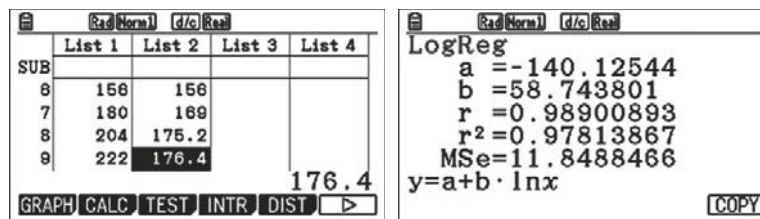
$$P(14) = \frac{70}{1 + 8,5 \times e^{-0,22 \times 14}} \approx 50,336$$

Consultando o gráfico, a altura da Laura deveria ser de 1,600 metros. Então:

$$\text{IMC} = \frac{50,336}{1,600^2} \approx 19,6625$$

No dia 1 de junho de 2012, o IMC da Laura era, aproximadamente, 19,7.

- 40.3 Vamos recorrer à calculadora gráfica para determinar os valores a e b da expressão $y = a + b \ln x$:



O modelo que melhor se ajusta aos valores da tabela é:

$$y = -140,125 + 58,744 \ln x$$

A altura do André no dia 1 de dezembro de 2014 (terá 16 anos e 6 meses, ou seja, $16 \times 12 + 6 = 198$ meses):

$$y = -140,125 + 58,744 \ln(198) \approx 170,5 \text{ cm}$$