Exercícios de aplicação (pág. 112)

1.1 $10\ 000+11\times 100=11\ 000$ pares de calças

1.2 $10\ 000+17\times 100=11\ 700$ pares de calças

2.1 50 páginas: $3+0,04\times 50=5\ €$

100 páginas: $3+0,04\times 100=7\ €$

2.2 $C(n)=3+0,04n$

3. Altitude do nível do mar: 0 metros

$1100-800=300\ \text{hPa}$

$\frac{1}{10}=\frac{300}{a}\Leftrightarrow a=3000$

O alpinista encontra-se a uma altitude de 3000 metros.

4. Atividade de investigação

5. 1.º termo = 5 razão = 3

$u_n=5+3(n-1)$ $n\rightarrow$ semanas

$42=5+3n-3\Leftrightarrow 3n=40\Leftrightarrow n=13,(3)$

Serão necessárias entre 13 e 14 semanas.

6. $P(2031)=10\ 561\ 614\times 1,0198^2\approx 10\ 983\ 994$ habitantes

7. 100 anos = 10 décadas

$P(2101)=267\ 785\times 1,093^{10}\approx 651\ 610$ habitantes

8. $C(12)=0,5\times 3^{12}=625\ 720,5\approx 265,7\ \text{m}$

9. $Valor(5)=28\ 800\times 0,85^5\approx 12\ 778,71\ €$

10. 1.º termo: 1 (4^0)

2.º termo: 4 (4^1)

3.º termo: 4^2 (4^2)

$u_n=4^{n-1}$

$1+4+16+64+\ldots+4^9=349\ 525$ pessoas

11.1 $11\ 000+6\times150=11\ 900$ toneladas

11.2 $Q(N)=11\ 000+150\times N$

11.3 $Q(N)=35\ 000\Leftrightarrow150N=24\ 000\Leftrightarrow N=160$ (ao fim de 160 meses)

$160:12\rightarrow13$ anos e 4 meses

A capacidade máxima deverá ser atingida em abril de 2028.

12.1 Tomé: $10+100\times11=1110$ €

Joana: $0,5+1+2+4+\ldots+2^8=0,5\times\left(2^{12}-1\right)=2047,5$ €

A Joana.

12.2

	Tomé		**Joana**	
1.º	10	+100	0,5	+1
2.º	110		1,5	+2
3.º	210		3,5	+4
4.º	310		7,5	+8
5.º	410		15,5	+16
6.º	510		31,5	+32
7.º	610		63,5	+64
8.º	710		127,5	+128
9.º	810		255,5	+256
10.º	910		511,5	

O Tomé, ao fim de dez meses.

13.

2^8=256

14.1 $C_1=2000\times1,03=2060$ €

14.2 $C_{1/s}=2000\times1,015^2=2060,45$ €

14.3 $C_{1/\text{dia}}=2000\times\left(1+\dfrac{0,03}{365}\right)^{365}\approx2060,91$ €

14.4 $C_{1/\text{hora}}=2000\times\left(1+\dfrac{0,03}{365\times24}\right)^{8760}\approx2060,91$ €

14.5 $C_{\text{continuamente}}=2000\times e^{0,03\times1}\approx2060,91$ €

15.1 $P(6) = 1 + 3 \times e^{0,1\times 6} \approx 6,466356401$

Será de, aproximadamente, 6466 elementos.

15.2 $P(t) > 5 \Leftrightarrow t \approx 2,88$ meses (calculadora)

Verificado através do gráfico $(t \approx 2,876820)$

16. $4000 = N_0 \times (1 + 0,055)^4 \Leftrightarrow N_0 = \dfrac{4000}{1,0554} \approx 3228,87$

A população inicial era de, aproximadamente, 3229 indivíduos.

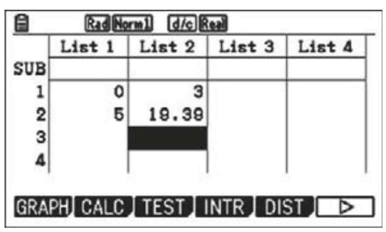
17.1 $P(10) = 167\ 646 \Leftrightarrow P_0 \times e^{0,02\times 10} = 167\ 646 \Leftrightarrow P_0 = \dfrac{167\ 646}{e^{0,2}} \Leftrightarrow P_0 = 137\ 256,9358$

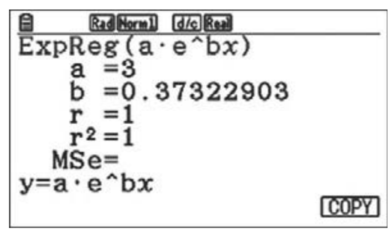
Existiam cerca de 137 257 melgas.

17.2 $P(25) = 137\ 257 \times e^{0,02\times 25} \approx 226\ 298,5355$

Ao fim de 25 dias existirão cerca de 226 299 melgas.

18.1 Recorrendo à calculadora gráfica, introduzimos os valores dados em duas listas e fazemos uma regressão exponencial.





Se usar $y = a \times b^x$, $a = 3$ e $b \approx 1,452$

Se usar $y = a \times e^{b^x}$, $a = 3$ e $b \approx 0,373$

Logo, o modelo pedido será:

$P(t) = 3 \times 1,452^t$ ou $P(t) = 3 \times e^{0,373t}$

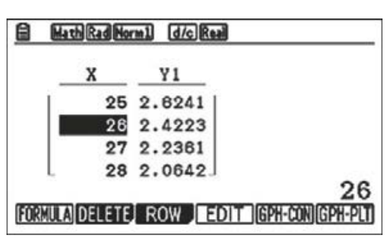
18.2 Zero horas de 18 de setembro $\rightarrow$ t = 0

$M(0) = 19,39 \times e^{-0,08\times 0} = 19,39$

Queremos determinar o menor valor de *t*, para o qual $M(t) \leq \dfrac{1}{8} M(0)$, isto é:

$M(t) \leq \dfrac{19,39}{8} \Leftrightarrow M(t) \leq 2,42375$

Colocamos a função $M(t) = 19,39 \times e^{-0,08t}$ no editor de funções da calculadora e analisamos a tabela de valores:



Verificamos que o primeiro valor de $M(t)$ mais próximo de 2,43275 acontece para x = 26 (t = 26). Assim, terão de passar, pelo menos, 27 dias para que o número de microrganismos presentes na água seja inferior a um oitavo do número contabilizado no instante em que se adicionou a substância.

19.1 $P(0)=\dfrac{100}{5+12e^{-0,3\times 0}}=\dfrac{100}{17}\approx 5{,}88$ milhares

19.2 $P(10)=\dfrac{100}{5+12e^{-3}}\approx 17{,}87$ milhares

19.3 $P(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\dfrac{100}{5+0}=20$ milhares (ou usar a calculadora gráfica para analisar o gráfico de $P(t)$)

20.1 $N(0)=\dfrac{2500}{1+1499\times e^{0}}=\dfrac{2500}{1500}\approx 1,(6)$

Havia um aluno infetado.

20.2 $N(7)=\dfrac{2500}{1+1499\times e^{-0,82\times 7}}\approx 429{,}632$

Havia cerca de 429 alunos.

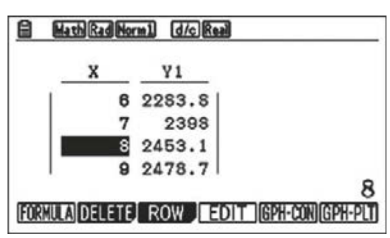
20.3 50% dos alunos: 1250

$$N(t)=1250 \Leftrightarrow \frac{2500}{1+1499\times e^{-0,82t}}=1250 \Leftrightarrow 1+1499\times e^{-0,82t}=2 \Leftrightarrow e^{-0,82t}=\frac{1}{1499} \Leftrightarrow$$

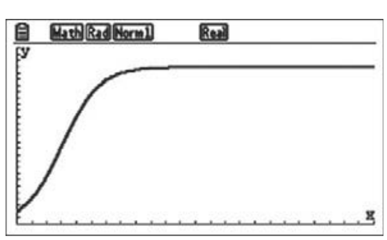
$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{-0{,}82}\ln\left(\frac{1}{1499}\right)\approx 8{,}92\approx 9 \text{ dias}$$

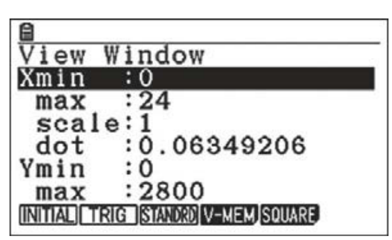
1 de outubro $\rightarrow$ t = 0, então, t = 9 corresponde ao dia 10 de outubro

21.1 Queremos saber o valor de t para o qual $P(t)=2453$. Consultando a tabela de valores na calculadora, após a introdução da expressão no editor de funções, podemos concluir que o número de desempregados inscritos na delegação em questão é 2453 ao fim de oito meses.



21.2 Com auxílio da calculadora, podemos obter o gráfico da função:



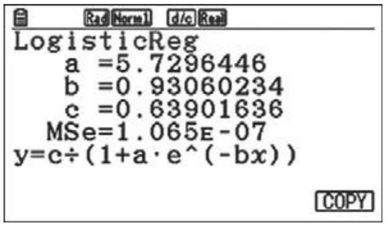


Podemos observar que inicialmente o número de desempregados inscritos era de 200 e que, no final do período em estudo, era 2500 $\left(P(24)=\dfrac{5000}{2+23\times e^{-0,8\times 24}}\approx 2499{,}99\right)$, o que corresponde ao número máximo de inscritos. Assim, verifica-se um aumento de $2500-200=2300$ desempregados inscritos nos 24 meses que durou o estudo. Por observação do gráfico, podemos também afirmar que inicialmente se verificou um aumento acentuado do número de desempregados inscritos, mas esse valor foi tendendo a estabilizar com o decorrer do tempo.

22.1

Duração (minutos)	**Tarifário N**
1	0,196
2	0,338
3	0,473
4	0,561
5	0,606
6	0,626
7	0,633
8	0,637
9	0,638
10	0,639

Introduzindo os valores do tarifário N no editor de estatística e fazendo uma regressão logística, obtemos os seguintes valores:

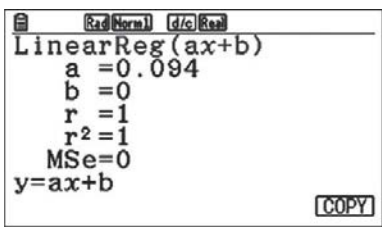


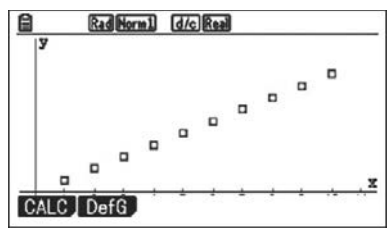
Assim, os valores pedidos são:
$a\approx 5{,}730$; $b\approx 0{,}931$ e $c\approx 0{,}639$

22.2 Com o auxílio da calculadora, após a introdução das listas:

Duração (minutos)	Tarifário M
1	0,094
2	0,188
3	0,282
4	0,376
5	0,470
6	0,564
7	0,658
8	0,752
9	0,846
10	0,940

obtemos o diagrama de dispersão, em que o eixo horizontal representa a duração das chamadas (em minutos) e o eixo vertical representa o custo da chamada (em euros).





O coeficiente de correlação é $r = 1$, logo, podemos dizer que a correlação linear é perfeita e concluir que o modelo linear é o adequado para descrever os dados relativos ao tarifário M.

22.3 O modelo linear que se adequa ao tarifário M é (ver ecrã da calculadora na resolução do exercício 22.2):

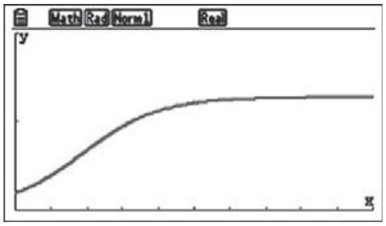
$$M(t) = 0{,}094t$$

O modelo para o tarifário N, como já vimos é:

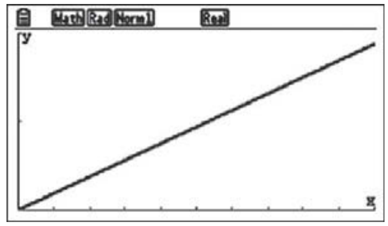
$$N(t) = \frac{0{,}639}{1 + 5{,}730 \times e^{-0{,}931t}}$$

Podemos observar a representação gráfica de cada um destes modelos (e a janela de visualização):

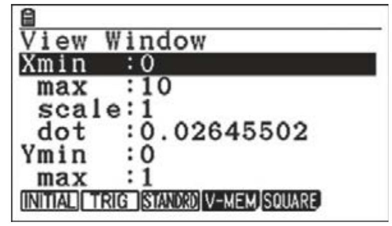
Modelo M

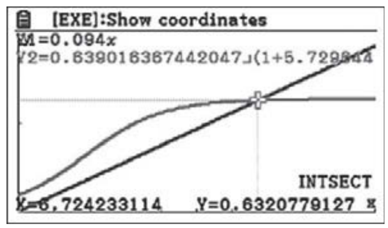


Modelo N



Janela de visualização





Assim, podemos observar que enquanto o modelo M aumenta proporcionalmente, no modelo N verifica-se um aumento acentuado nos primeiros minutos e depois uma estabilização a partir de uma certa altura (0,639 €). Apesar das diferenças de evolução nos dois tarifários para chamadas com uma duração total de 6,724 minutos, aproximadamente, o custo é igual para os dois. A partir daqui, o tarifário M torna-se mais dispendioso do que o tarifário N.

23. $L(h) > 4 \Leftrightarrow \log(80+h)+2 > 4 \Leftrightarrow \log(80+h) > 2 \Leftrightarrow 80+h > 10^2 \Leftrightarrow h > 20$

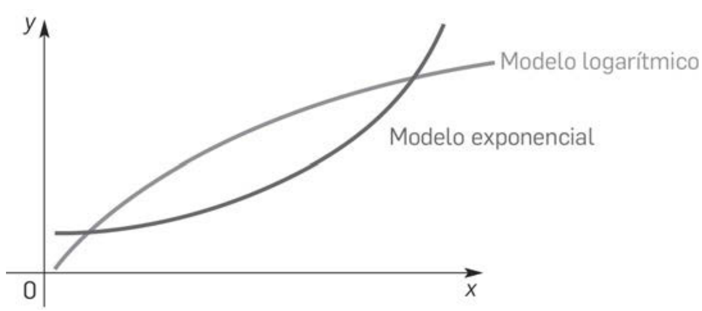
Será necessário trabalhar mais de 20 horas.

24. Modelo exponencial:

Casio: $y = 0{,}866 \times e^{0{,}324x}$

Texas: $y = 0{,}866 \times 1{,}383^{x}$

Modelo logarítmico: $y = 0{,}630 + 2{,}673 \ln x$



O modelo logarítmico é o que melhor se ajusta aos dados da experiência.

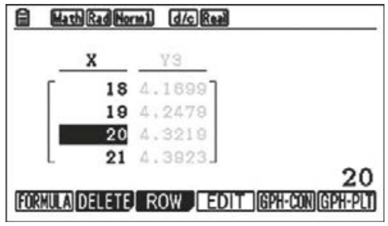
25.1 $D(67) = \log_2(67) = \dfrac{\ln 67}{\ln 2} \approx 6{,}1$

A diversidade será cerca de 6,1.

25.2 Queremos determinar o valor de *n*, de modo que:

$D(n) \geq 4{,}3 \Leftrightarrow \log_2(n) \geq 4{,}3$

Usamos a tabela de valores da função na calculadora (após a introdução da função):



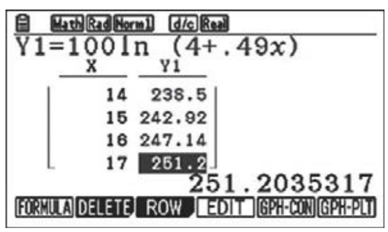
Podemos verificar que o primeiro a ultrapassar 4,3 é 4,3219 e corresponde ao valor $x = 20$. Assim, é necessário um número mínimo de 20 espécies no aquário para que a diversidade não seja inferior a 4,3.

26.1 $2018 - 2006 = 12 \rightarrow$ número de anos decorridos

Assim, $A(12) = 100\ln(4 + 0{,}49 \times 12) \approx 229{,}05\ldots$

O número de unidades de sangue a recolher em 2018 será de, aproximadamente, 229 milhares.

26.2 Podemos recorrer à calculadora gráfica para observar a tabela de valores da função A:



Pretendemos determinar o menor valor de *t* para o qual $A(t) \geq 250$. Concluímos que terão de passar 17 anos até que o número de unidades de sangue recolhidas ultrapasse as 250 mil por ano. Assim, as necessidades do país serão asseguradas em $2006 + 17 = 2023$.