

Atividade 5 (pág. 261)

$$\varepsilon = 4\%$$

Tendo em conta o resultado anterior, tem-se que:

$$n = \left(\frac{2,576}{0,04} \right)^2 \times 0,25 \approx 1037$$

Aproximadamente 1037 pessoas.

Exercícios de aplicação (pág. 266)

1. Composição

2. Composição

3.1 A população é constituída pelas 1486 pessoas que estão na sala.

3.2 A amostra será constituída pelas 12 pessoas que vão ser selecionadas de forma sistemática.

3.3 Se o primeiro sorteado é o número 16, haverá ainda $1486 - 16 = 1470$ pessoas suscetíveis de serem selecionadas. Como $1470 : 12 = 122,5 \approx 123$, haverá 123 senhas de intervalo entre dois selecionados consecutivos.

$$16 + 123 = 139 ; 139 + 123 = 262 ; 262 + 123 = 385 ; 385 + 123 = 508 ; 508 + 123 = 631 ;$$

$$631 + 123 = 754 ; 754 + 123 = 877 ; 877 + 123 = 1000 ; 1000 + 123 = 1123 ;$$

$$1123 + 123 = 1246 ; 1246 + 123 = 1369$$

Assim, os felizes contemplados serão os espetadores que tiverem uma das senhas pertencentes ao conjunto: {16, 262, 385, 508, 631, 754, 877, 1000, 1123, 1246, 1369}

4.1

	Número total de alunos	Porcentagem		Número de alunos	
		♀	♂	♀	♂
1.º Ciclo	860	55	<u>45</u>	<u>473</u>	<u>387</u>
2.º Ciclo	580	<u>50</u>	50	<u>290</u>	<u>290</u>
3.º Ciclo	<u>1230</u>	<u>60</u>	40	<u>738</u>	<u>492</u>
Secundário	1850	36	<u>64</u>	<u>666</u>	<u>1184</u>
Total	<u>4520</u>			<u>2172</u>	<u>2358</u>

4.2 $4520 \times 0,10 = 452$ alunos que deverão fazer parte da amostra.

$$1.^\circ \text{ Ciclo } \begin{cases} 473 \times 0,10 = 47,3 \approx 47 \text{ raparigas} \\ 387 \times 0,10 = 38,7 \approx 39 \text{ rapazes} \end{cases}$$

$47 + 39 = 86$ alunos, que corresponde a 10% do total de alunos do 1.º Ciclo.

$$2.^\circ \text{ Ciclo } \begin{cases} 290 \times 0,10 = 29 \text{ raparigas} \\ 290 \times 0,10 = 29 \text{ rapazes} \end{cases}$$

$29 + 29 = 58$ alunos, que corresponde a 10% do total de alunos do 2.º Ciclo.

$$3.^\circ \text{ Ciclo } \begin{cases} 738 \times 0,10 = 73,8 \approx 74 \text{ raparigas} \\ 492 \times 0,10 = 49,2 \approx 49 \text{ rapazes} \end{cases}$$

$74 + 49 = 123$ alunos, que corresponde a 10% do total de alunos do 3.º Ciclo.

$$\text{Ensino Secundário } \begin{cases} 666 \times 0,10 = 66,6 \approx 67 \text{ raparigas} \\ 1184 \times 0,10 = 118,4 \approx 118 \text{ rapazes} \end{cases}$$

$67 + 118 = 185$ alunos, que corresponde a 10% do total de alunos do Ensino Secundário.

Então, deverão ser selecionados 86 alunos do 1.º Ciclo, 58 do 2.º Ciclo, 123 do 3.º Ciclo e 185 do Ensino Secundário, num total de 452 alunos.

5. Como 20% dos alunos do agrupamento corresponde a $4365 \times 0,20 = 873$, este é o número total de alunos que deverão fazer parte da amostra.

Cálculo da proporção de alunos de cada ciclo:

$$1.^\circ \text{ Ciclo: } \frac{937}{4365} \approx 0,2147$$

$$2.^\circ \text{ Ciclo: } \frac{598}{4365} \approx 0,1370$$

$$3.^\circ \text{ Ciclo: } \frac{1236}{4365} \approx 0,2832$$

$$\text{Ensino Secundário: } \frac{1594}{4365} \approx 0,3652$$

Cálculo do número de alunos a selecionar de cada ciclo:

$$1.^\circ \text{ Ciclo: } 873 \times 0,2147 \approx 187 \text{ alunos}$$

$$2.^\circ \text{ Ciclo: } 873 \times 0,1370 \approx 120 \text{ alunos}$$

$$3.^\circ \text{ Ciclo: } 873 \times 0,2832 \approx 247 \text{ alunos}$$

$$\text{Ensino Secundário: } 873 \times 0,3652 \approx 319 \text{ alunos}$$

Assim, deverão fazer parte desta amostra 187 alunos do 1.º Ciclo, 120 do 2.º Ciclo, 247 do 3.º Ciclo e 319 do Ensino Secundário, num total de 873 alunos.

6. B

7. B

$$\hat{p} = \frac{500 - 153}{500} = 0,694$$

8.1 Parâmetro: proporção de alunos da escola que foram ao cinema pelo menos uma vez no último mês

8.2 Estatística: $\hat{p} = \frac{83}{130} \approx 0,638$

8.3 $1 - 0,638 = 0,362 \rightarrow 36,2\%$

9.1 $\bar{x} = \frac{4 + 3,6 + 3,4 + 3,6 + 3,5 + 3,7 + 3,5 + 3,5}{8} = 3,6$

9.2 ~~$s \approx 0,173$~~ (S=0.185 valor obtido com a calculadora, modo estatístico)

10.1 São $5^2 = 25$ amostras

10.2

Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}
(1, 1)	1	(3, 1)	2	(6, 1)	3,5	(8, 1)	4,5	(9, 1)	5
(1, 3)	2	(3, 3)	3	(6, 3)	4,5	(8, 3)	5,5	(9, 3)	6
(1, 6)	3,5	(3, 6)	4,5	(6, 6)	6	(8, 6)	7	(9, 6)	7,5
(1, 8)	4,5	(3, 8)	5,5	(6, 8)	7	(8, 8)	8	(9, 8)	8,5
(1, 9)	5	(3, 9)	6	(6, 9)	7,5	(8, 9)	8,5	(9, 9)	9

10.3

\bar{X}	1	2	3	3,5	4,5	5	5,5	6	7	7,5	8	8,5	9
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

10.4 $\mu = \frac{1+3+6+8+9}{5} = 5,4$

$$E(\bar{X}) = 1 \times \frac{1}{25} + 2 \times \frac{2}{25} + 3 \times \frac{1}{25} + \dots + 8,5 \times \frac{2}{25} + 9 \times \frac{1}{25} \Leftrightarrow E(\bar{X}) = 5,4$$

$\mu = E(\bar{X})$, logo, o estimador não é enviesado (é cêntrico).

10.5 $\sigma = 3,007$ $\sigma_{\bar{X}} \approx 2,126$ (valores obtidos com a calculadora, modo estatístico)

10.6 $\frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \frac{3,007}{\sqrt{2}} \approx 2,126$

O valor obtido é igual ao desvio-padrão da distribuição de amostragem da média.

11. Uma vez que são $5^3 = 125$ amostras, sugere-se a divisão da turma em cinco grupos e cada grupo faz o estudo de 25 amostras: determinar as amostras, a média de cada uma e os diferentes valores que esta pode assumir. Por exemplo, o grupo 1 estuda as amostras que começam com o elemento 1, o grupo 2, as amostras que começam pelo elemento 3 e assim sucessivamente. Quando se juntam os resultados obtidos por todos os grupos, dever-se-á obter:

\bar{X}	1	1,67	2,33	2,67	3	3,33	3,67	4	4,33	4,67	5	5,33
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{9}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{9}{125}$	$\frac{9}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{6}{125}$
\bar{X}	5,67	6	6,33	6,67	7	7,33	7,67	8	8,33	8,67	9	
P	$\frac{9}{125}$	$\frac{13}{125}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{9}{125}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{4}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{1}{125}$	

$\mu = 5,4 = E(\bar{X}), \sigma_{\bar{X}} \approx 1,736$

12. Composição

13.1 B

13.2 C

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{9,25}{\sqrt{40}} \approx 1,463$ g

14.1 $E(\bar{X}) = 17,5$ kg

14.2 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{2,75}{\sqrt{35}} \approx 0,465$ kg

15.1 $\mu_{\bar{X}} = 1250$ horas

15.2 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{110}{\sqrt{45}} \approx 16,398$ horas

15.3.1 $U = \frac{\bar{X} - 1250}{16,398} \Leftrightarrow \bar{X} = 16,398U + 1250$

$$\begin{aligned}
 P(1200 < \bar{X} < 1280) &= P(1200 - 1250 < 16,398U < 1280 - 1250) \approx \\
 &\approx P(-3,05 < U < 1,83) = \phi(1,83) - 1 + \phi(3,05) \approx 0,9664 - 1 + 0,9989 = \\
 &= 0,9653 \rightarrow 96,53\%
 \end{aligned}$$

(tabela da página 193 do Manual)

15.3.2

$$P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| < 0,4\right) = P\left(\left|U\right| < \frac{0,4}{16,398}\right) \approx P\left(\left|U\right| < 0,02\right) = 2\phi(0,02) - 1 = 2 \times 0,5080 - 1 = 0,016 \rightarrow 1,6\%$$

16. O intervalo de 90% para μ é:

$$\left] \bar{x} - 1,645 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,645 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

Neste caso,

$$\left] 150 - 1,645 \times \frac{50}{\sqrt{10}}; 150 + 1,645 \times \frac{50}{\sqrt{10}} \right[=]141,78; 158,23[$$

17. $n = 80$, $\bar{x} = 127$ e $s = 9$

O intervalo de confiança de 90% para μ é:

$$\left] 127 - 1,645 \times \frac{9}{\sqrt{80}}; 127 + 1,645 \times \frac{9}{\sqrt{80}} \right[=]125,34; 128,66[$$

18. O intervalo de 95% para μ é:

$$\left] \bar{x} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[=]\bar{x} - 1,96 \times 0,5; \bar{x} + 1,96 \times 0,5[=]\bar{x} - 0,98; \bar{x} + 0,98[$$

$P(\bar{x} - 0,98 \leq \mu \leq \bar{x} + 0,98) = 0,95$, o que significa que a probabilidade de o intervalo $]\bar{x} - 0,98; \bar{x} + 0,98[$ conter o valor médio μ é 0,95.

19. $n = 80$; $\bar{x} = 1,6$ e $s = 0,05$

O intervalo de 95% para μ é:

$$\left] 1,6 - 1,96 \times \frac{0,05}{\sqrt{80}}; 1,6 + 1,96 \times \frac{0,05}{\sqrt{80}} \right[=]1,59; 1,61[$$

20.1 $n = 80$, $\bar{x} = 70$ e $s = 4$

Um intervalo de confiança de 90% para μ é:

$$\left] 70 - 1,645 \times \frac{4}{\sqrt{80}}; 70 + 1,645 \times \frac{4}{\sqrt{80}} \right[=]69,26; 70,74[$$

20.2 $n = 100$, $\bar{x} = 70$ e $s = 4$

Um intervalo de confiança de 95% para μ é:

$$\left] 70 - 1,96 \times \frac{4}{\sqrt{100}}; 70 + 1,96 \times \frac{4}{\sqrt{100}} \right[=]69,216; 70,784[$$

20.3 $n = 80$, $\bar{x} = 60$ e $s = 4$

Um intervalo de confiança de 99% para μ é:

$$\left] 60 - 2,576 \times \frac{4}{\sqrt{80}}; 60 + 2,576 \times \frac{4}{\sqrt{80}} \right[=]58,85; 61,15[$$

21.1 $\sigma = 10$, $n = 50$ e $\bar{x} = 994$

O intervalo de confiança de 90% para μ é:

$$\left] 994 - 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{50}}; 994 + 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{50}} \right[=]991,67; 996,33[$$

O intervalo de confiança de 99% para μ é:

$$\left] 994 - 2,576 \times \frac{10}{\sqrt{50}}; 994 + 2,576 \times \frac{10}{\sqrt{50}} \right[=]990,36; 997,64[$$

À medida que o grau de confiança aumenta, a amplitude do intervalo também aumenta.

21.2 $n = 200$ e $\bar{x} = 994$

O intervalo de confiança de 90% para μ é:

$$\left] 994 - 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{200}}; 994 + 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{200}} \right[=]992,84; 995,16[$$

21.3 À medida que a dimensão da amostra aumenta, a amplitude do intervalo diminui.

22. Sabe-se que para $s = 29$ e $n = 40$, o intervalo de confiança de 95% para μ é $]160, 178[$.

Sabe-se ainda que:

$$\bar{x} = \frac{178 + 160}{2} = 169$$

Assim, o intervalo de confiança de 99%, para a mesma amostra, resulta dos seguintes valores:

$$\bar{x} = 994, s = 29 \text{ e } n = 40$$

Logo:

$$\left] 169 - 2,576 \times \frac{29}{\sqrt{40}}; 169 + 2,576 \times \frac{29}{\sqrt{40}} \right[=]157,188; 180,812[$$

Arredondando às unidades, obtemos $]157, 181[$.

23. Sabemos que o intervalo de confiança de 90% para o número médio de habitantes servidos por cada ponto de acesso à rede postal em 2012 é $]546, 554[$.

Sabemos que este intervalo é da forma $\left] \bar{x} - 1,645 \times \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,645 \times \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$, em que $n = 200$.

Sabemos ainda que:

$$\bar{x} = \frac{546 + 554}{2} = 550$$

Então, temos que:

$$550 - 1,645 \times \frac{s}{\sqrt{200}} = 546 \Leftrightarrow \frac{1,645s}{\sqrt{200}} = 4 \Leftrightarrow \frac{s}{\sqrt{200}} = \frac{4}{1,645} \Leftrightarrow s \frac{4\sqrt{200}}{1,645} \Leftrightarrow s \approx 34,388$$

Então, $\bar{x} = 550$ e $s \approx 34$.

24. $n = 210$; $\bar{x} = 1,80$ e $s = 1,10$

O intervalo de confiança de 99% para μ é:

$$\left[1,80 - 2,576 \times \frac{1,10}{\sqrt{210}}; 1,80 + 2,576 \times \frac{1,10}{\sqrt{210}} \right] =]1,60; 2[$$

Não há razão para duvidar da afirmação do funcionário porque o valor médio pertence a $]1,6; 2[$.

25. Recorrendo aos valores da amostra, usamos para estimador do valor médio a média amostral e para estimador do desvio-padrão populacional o desvio-padrão da amostra.

Obtemos as estatísticas usando a calculadora e tem-se que: $\bar{x} = 2,675$ e $s \approx 1,9267$.

Queremos determinar o intervalo de confiança de 95% para o valor médio, sabendo que $n = 40$, $\bar{x} = 2,675$ e $s \approx 1,9267$.

O intervalo de confiança requerido é da forma: $\left[\bar{x} - 1,96 \times \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,96 \times \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$.

Substituindo os valores, obtemos:

$$\left[2,675 - 1,96 \times \frac{1,9267}{\sqrt{40}}; 2,675 + 1,96 \times \frac{1,9267}{\sqrt{40}} \right] =]2,078; 3,272[$$

26. $n = 40$, $\bar{x} = 6$ e $s = 0,5$

A margem de erro para um intervalo de confiança de 95% para o atraso médio é dada por:

$$1,96 \times \frac{0,5}{\sqrt{40}} = 0,155$$

27. A proporção amostral dá-nos a frequência relativa dos eleitores a favor do candidato A. Neste caso, $\hat{p} = \frac{350}{500} = 0,7$, ou seja, 70% dos eleitores da amostra são a favor do candidato A.

28. $n = 50$

$$\hat{p} = \frac{40}{50} = 0,8 = 80\%$$

29. Trabalho de pesquisa

30. Como $n = 400$, podemos considerar que é uma distribuição aproximadamente normal com valor médio 0,3 e desvio-padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,3 \times (1 - 0,3)}{400}} \approx 0,02$$

31. $n = 500$

$$\bar{x} = \frac{300}{500} = 0,6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,6 \times (1 - 0,6)}{500}} \approx 0,022$$

32. Relatório

33.1 $n = 1500$ $\hat{p} = 76\%$

A margem de erro é:

$$z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,645 \times \sqrt{\frac{0,76 \times 0,24}{1500}} = 0,0181 = 1,8\%$$

Portanto, a margem de erro é inferior a 5%.

33.2 Margem de erro:

$$1,645 \times \sqrt{\frac{0,76 \times 0,24}{3000}} = 0,0128 = 1,28\%$$

33.3 À medida que a dimensão da amostra aumenta, a margem de erro diminui.

34. $n = 1200$ e $p = 40\%$

Intervalo de confiança de 90%:

$$\left[0,4 - 1,645 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}}; 0,4 + 1,645 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}} \right] =]0,377; 0,423[$$

Intervalo de confiança de 95%:

$$\left[0,4 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}}; 0,4 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}} \right] =]0,372; 0,428[$$

Intervalo de confiança de 99%:

$$\left[0,4 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}}; 0,4 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1200}} \right] =]0,364; 0,436[$$

À medida que o nível de confiança aumenta, a amplitude do intervalo também aumenta.

35. $n = 1000$ e $\hat{p} = \frac{450}{1000} = 0,45$

O intervalo de confiança de 90% para a proporção de habitantes com dois televisores é:

$$\left[0,45 - 1,645 \times \sqrt{\frac{0,45 \times (1 - 0,45)}{1000}}; 0,45 + 1,645 \times \sqrt{\frac{0,45 \times 0,55}{1000}} \right] =]0,424; 0,476[$$

Não existem razões para duvidar do aumento da percentagem de habitações com dois televisores de 2001 para 2009, pois o valor real da proporção em 2009 está entre 42,4% e 47,6%, com uma probabilidade de 90%.

36. Esta afirmação significa que o intervalo $]77\%, 83\%[$ é um intervalo de confiança de 95% para a proporção pretendida. Se recolhêssemos 100 amostras diferentes, com a mesma dimensão, e construíssemos os respetivos intervalos de confiança, esperar-se-ia que, aproximadamente, 95 desses intervalos contivessem a proporção de pessoas que estão contra a ETAR.

37. O intervalo $]35\%, 45\%[$ é um intervalo de confiança de 95% para a proporção de pessoas que consideram que a droga é o problema mais sério que afeta a adolescência.

A margem de erro é:

$$\frac{45 - 35}{2} = 5\%$$

38. $\sigma = 0,5$ e $\varepsilon \leq 0,01$

Dimensão da amostra para um intervalo de 90% de confiança:

$$n = \left(\frac{1,645 \times 0,5}{0,01} \right)^2 = 6765$$

Dimensão da amostra para um intervalo de 95%:

$$n = \left(\frac{1,960 \times 0,5}{0,01} \right)^2 = 9604$$

39. Sabe-se que $]0,34958; 0,53042[$ é um intervalo de forma:

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

A amplitude é:

$$0,53042 - 0,34958 = 0,18084$$

$$\text{Tem-se que: } \hat{p} = \frac{38 + 38 + 12}{200} = 0,44 \text{ e } n = 200$$

A margem de erro é:

$$\frac{0,18084}{2} = 0,09042$$

Logo:

$$z \sqrt{\frac{0,44 \times 0,56}{200}} = 0,09042 \Leftrightarrow z \approx 2,576$$

Pelo que corresponde a um nível de confiança de 99%.

40. Sabe-se que: $\varepsilon = 3\%$, o nível de confiança é 95% e $\hat{p} = 45\%$.

A dimensão da amostra é:

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)^2 \times \hat{p}(1-\hat{p}) = \left(\frac{1,96}{0,03} \right)^2 \times 0,45 \times 0,55 = 1056$$

41. $\hat{p} = 0,52$ e $z = 1,960$

Se a amplitude é 0,2, então a margem de erro é 0,1.

$$1,960 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,48}{n}} = 0,1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{0,2496}{n}} = 0,0510 \Leftrightarrow \frac{0,2496}{n} = 0,0510^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{0,2496}{0,0510^2} \Leftrightarrow n \approx 96$$

Tema 5 – Exercícios globais (pág. 271)

1.1 $4 + 1 + 1 = 6\%$

Como a dimensão da amostra é 15 800, o número de inquiridos correspondente é $0,06 \times 15\ 800 = 948$.

1.2 Calculamos a percentagem acumulada:

Escala	Percentagem	Percentagem acumulada
1	10	10
2	12	22
3	16	38
4	17	55
5	19	74
6	12	86
7	8	94
8	4	98
9	1	99
10	1	100

O primeiro quartil é o valor da variável abaixo do qual se encontram 25% dos dados. Verificamos que corresponde ao nível 3.

A mediana corresponde ao nível 4, pois é o valor da variável abaixo do qual se encontram 50% dos dados.

1.3 $n = 15\ 800$ e $\hat{p} = 0,1$

O intervalo de confiança de 99% para a proporção é dado por:

$$\left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] = \left[0,1 - 2,576 \sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{15800}}; 0,1 + 2,576 \sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{15800}} \right] =$$

$$=]0,094; 0,106[$$