

**EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO**  
**11.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)**

**Curso Científico-Humanístico  
de Ciências Sociais e Humanas**

Duração da prova: 150 minutos  
2006

1.ª FASE

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS**

---

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 9.

A prova inclui um formulário (páginas 10 e 11).

Pode utilizar material de desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor) e calculadora gráfica.

Nos itens em que é pedida a elaboração de uma composição, cerca de 10% da cotação é atribuída à comunicação em língua portuguesa.

Em todas as questões da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar de forma inequívoca a que pretende que seja classificada (riscando todas as que pretende anular).

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

1. No dia 9 de Outubro de 2005, realizaram-se eleições autárquicas em Portugal.

Os dados apresentados no quadro seguinte dizem respeito às eleições para a Câmara Municipal de um certo concelho.

<b>Total de eleitores inscritos:</b> 141 360
<b>Número de mandatos:</b> 11
<b>Partidos concorrentes:</b> A, B, C, D, E e F

Os resultados provisórios das eleições para a Câmara Municipal desse concelho, divulgados pelo Secretariado Técnico dos Assuntos para o Processo Eleitoral (STAPE), pouco tempo depois do encerramento das urnas, foram os seguintes:

**Número de votos brancos:** 2 225

**Número de votos nulos:** 1 550

Partidos	A	B	C	D	E	F
<b>Número de votos</b>	28 799	17 437	11 959	4 785	948	340

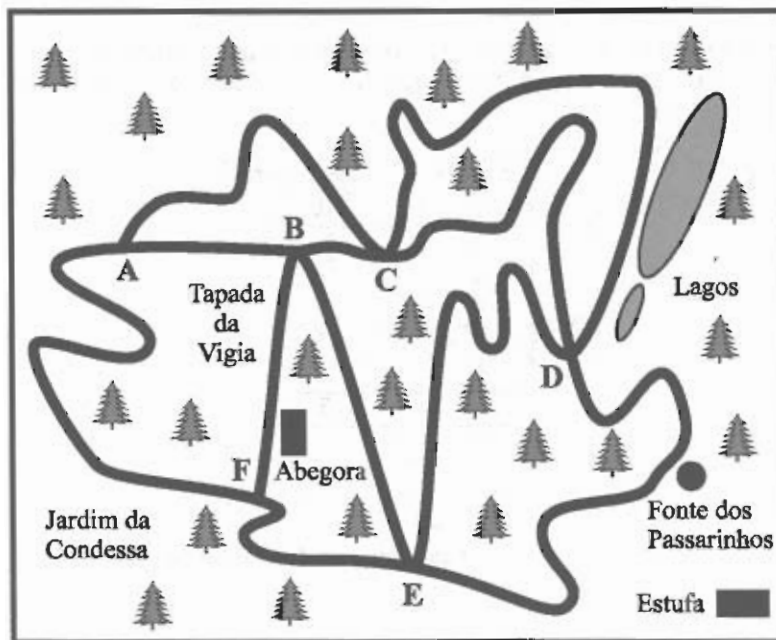
- 1.1. Calcule a percentagem da abstenção, nestas eleições, para a referida Câmara Municipal. Apresente o resultado arredondado às unidades.
- 1.2. No dia 11 de Outubro, um jornal diário, referindo-se às eleições para a mesma Câmara Municipal, publicou uma notícia, na qual se podia ler:

*O partido D vai exigir a recontagem dos votos, por considerar que persistem dúvidas quanto ao resultado oficial divulgado na noite de domingo. Por apenas 15 votos (...), o partido D não elegeu o seu cabeça-de-lista como vereador. (...) A eleição de um vereador do partido D alteraria a relação de forças no executivo dessa Câmara. (...) «Era fundamental que o partido D estivesse representado, não só pela força que já tem, mas também porque obrigaria o presidente a dialogar com a oposição e a aprofundar a democracia e a pluralidade de ideias», frisou o cabeça-de-lista do partido D.*

Tendo em conta os resultados eleitorais, elabore uma composição na qual comente esta notícia. Na sua composição, deve:

- determinar o número de mandatos obtidos por cada força política, aplicando o método de Hondt (apresente os quocientes arredondados às décimas);
- explicar por que razão foi por 15 votos que o partido D não elegeu nenhum vereador e qual o partido que perderia um mandato se o partido D tivesse tido mais 15 votos (admitindo que os restantes partidos mantinham a sua votação);
- explicar o sentido da frase (acima sublinhada) do cabeça-de-lista do partido D, relacionando-a com o tipo de maioria (simples ou absoluta) obtida pela força vencedora e com o que teria acontecido, caso ele tivesse sido eleito.

2. Alguns visitantes menos civilizados do Parque da Pena, em Sintra, têm por hábito deitar para o chão sacos de plástico, paus de gelado, latas de refrigerante, etc. Um grupo de jovens amantes da natureza decide, durante uma tarde, ajudar a recolher todo o lixo existente nos caminhos duma zona do Parque. Na figura, está um mapa dessa zona do Parque da Pena. Os cruzamentos dos caminhos estão assinalados por letras, de **A** a **F**.



Admita que o grupo de jovens parte do ponto **A**, assinalado no mapa, percorre todos os caminhos assinalados, recolhendo o lixo, e regressa ao ponto **A**.

- 2.1. O grupo de jovens tem de percorrer pelo menos um caminho, mais do que uma vez. Justifique esta afirmação, começando por modelar, por meio de um grafo, o mapa da zona do Parque da Pena representado na figura.
- 2.2. Indique um percurso em que o número de caminhos percorridos mais do que uma vez seja o menor possível. Dê a sua resposta na forma de uma sequência de letras, de acordo com a sequência de cruzamentos do percurso por si escolhido.
- 2.3. Na obra de Joseph Malkevitch, *Modelos de Grafos*, pode ler-se: «A ideia chave na modelação matemática consiste em tomar a situação original e simplificá-la de tal modo que fiquemos com uma nova visão sobre o problema original.»

Elabore uma composição onde desenvolva a ideia expressa, nesta frase, por Joseph Malkevitch. Baseie-se no modelo que considerou nas alíneas anteriores ou num exemplo à sua escolha, que integre a utilização de grafos.

Nessa composição deve referir:

- o porquê da necessidade de simplificar a realidade;
- o porquê da necessidade de distinguir o essencial do acessório;
- os aspectos que foram simplificados, relativamente à situação original.

- 3.** Com o objectivo de estudar o grau de informação dos cidadãos da União Europeia (UE) sobre as políticas e instituições da UE, uma empresa de sondagens realizou um inquérito no Outono de 1999.

A dimensão da amostra foi de 15 800 pessoas, escolhidas aleatoriamente entre os cidadãos da UE com 15 ou mais anos.

Perguntava-se aos inquiridos em que medida se sentiam informados sobre a UE, sendo a resposta dada mediante a selecção de um número, de 1 (não sabe nada) a 10 (sabe muito).

No quadro seguinte, apresentam-se os resultados desse inquérito.

Para cada nível, indica-se a percentagem de inquiridos que se auto-avaliaram nesse nível.

Escala	Percentagem
1	10
2	12
3	16
4	17
5	19
6	12
7	8
8	4
9	1
10	1

Auto-avaliação dos conhecimentos sobre questões da UE

- 3.1.** Admita que os níveis 8, 9 e 10 correspondem a um elevado conhecimento sobre questões da UE.

Determine o número de inquiridos que consideraram ter um elevado conhecimento sobre questões da UE.

- 3.2.** Tendo em conta a tabela acima e com base nas respectivas definições, justifique que o primeiro quartil desta distribuição é 3 e que a mediana é 4.

- 3.3.** Admita que:

- dos inquiridos que declararam não saber nada (nível 1), 20% são portugueses;
- dos inquiridos que se auto-avaliaram num nível superior a 1, 5% são portugueses.

Escolhido, ao acaso, um inquirido, constatou-se que era português.

Determine a probabilidade de ele se ter auto-avaliado com nível 1. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

- 3.4.** Obtenha um intervalo, com uma confiança de 99%, para a proporção de cidadãos da UE, com 15 ou mais anos, que consideram não saber nada (nível 1) sobre as políticas e instituições da UE. Apresente os valores dos extremos do intervalo na forma de dízima, arredondados às milésimas.

**3.5.** Qualquer intervalo de confiança para uma proporção tem uma certa margem de erro.

Elabore uma composição na qual defina margem de erro de um intervalo de confiança e relacione a fórmula que dá o intervalo de confiança (em função da proporção amostral, da dimensão da amostra e do nível de confiança) com a seguinte questão: o que acontece à margem de erro, quando, mantendo a confiança, se aumenta a dimensão da amostra?

A sua composição deve incluir:

- a definição de margem de erro de um intervalo de confiança;
- uma simulação da variação da margem de erro de um intervalo de confiança, em função da dimensão da amostra, percorrendo as seguintes etapas:
  - considere, por exemplo,  $\hat{p} = 0,5$  e  $n = 100$  e obtenha um intervalo, com um nível de confiança de 95%, para a proporção  $p$ ;
  - atribua diferentes valores a  $n$  e obtenha os respectivos intervalos de confiança;
  - descreva o que acontece à margem de erro do intervalo quando se aumenta a dimensão da amostra.

**FIM**

## COTAÇÕES

<b>1.</b> .....	<b>50</b>
<b>1.1.</b> .....	10
<b>1.2.</b> .....	40
<b>2.</b> .....	<b>50</b>
<b>2.1.</b> .....	15
<b>2.2.</b> .....	15
<b>2.3.</b> .....	20
<b>3.</b> .....	<b>100</b>
<b>3.1.</b> .....	15
<b>3.2.</b> .....	20
<b>3.3.</b> .....	20
<b>3.4.</b> .....	20
<b>3.5.</b> .....	25
<b>TOTAL</b> .....	<b>200</b>



# FORMULÁRIO

## TEORIA MATEMÁTICA DAS ELEIÇÕES

### Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

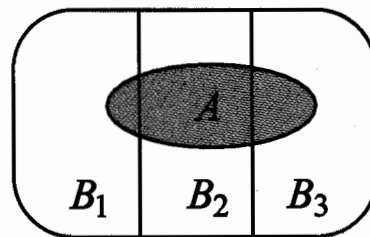
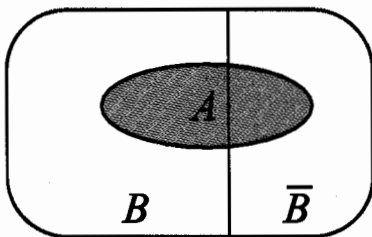
## MODELOS DE GRAFOS

### Condição necessária e suficiente para que um grafo admita circuitos de Euler

Um grafo admite circuitos de Euler se e só se é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

## PROBABILIDADES

### Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(B) \times P(A|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k|A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A|B_k)}{P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3)} \end{aligned}$$

podendo  $k$  tomar os valores 1, 2 ou 3.

## INTERVALOS DE CONFIANÇA

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$
<p><math>n</math> - dimensão da amostra  <math>\bar{x}</math> - média amostral  <math>\sigma</math> - desvio padrão da variável  <math>z</math> - valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$
<p><math>n</math> - dimensão da amostra  <math>\bar{x}</math> - média amostral  <math>s</math> - desvio padrão amostral  <math>z</math> - valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

Intervalo de confiança para uma proporção  $p$ , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$
<p><math>n</math> - dimensão da amostra  <math>\hat{p}</math> - proporção amostral  <math>z</math> - valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

(\*) Valores de  $z$  para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
$z$	1,645	1,960	2,576

**EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO**  
**11.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)**

**Curso Científico-Humanístico  
de Ciências Sociais e Humanas**

Duração da prova: 150 minutos  
**2006**

1.ª FASE

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS**

---

**COTAÇÕES**

<b>1.</b>		
1.1.	.....	10 pontos
1.2.	.....	40 pontos
<b>2.</b>		
2.1.	.....	15 pontos
2.2.	.....	15 pontos
2.3.	.....	20 pontos
<b>3.</b>		
3.1.	.....	15 pontos
3.2.	.....	20 pontos
3.3.	.....	20 pontos
3.4.	.....	20 pontos
3.5.	.....	25 pontos
	<b>TOTAL</b> .....	<b>200 pontos</b>

# CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

## Critérios gerais

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.
2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.
3. As cotações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas obrigatoriamente em números inteiros.
4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:
  - Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de 0 (zero) pontos.
  - Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8, 9 e 10 destes critérios gerais, e das desvalorizações previstas no ponto 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a cotação a atribuir é de 0 (zero) pontos.
5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.
6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.
  - 6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
  - 6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.

Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.

Caso uma etapa envolva mais do que um passo e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:

    - erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
    - erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
    - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
    - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

- 6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.
- 6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
- 6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
- 6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.
7. Existem, por vezes, itens em que está prevista a elaboração de uma composição. Nesses itens, os critérios específicos prevêm uma valorização das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. Esta valorização é feita de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
- Nível 3 - Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de coerência e de rigor de sentido.
- Nível 2 - Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
- Nível 1 - Composição sem estruturação, com a presença de erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, com perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.
8. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização).
9. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.
10. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item. Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na cotação total a atribuir ao item, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado..... -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução..... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução ..... -2 pontos

## Critérios específicos

### 1.1. .... 10

Esta questão pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos:

#### 1.º Processo

Determinar o número total de votos (68 043)

Determinar o número de abstenções (141 360 - 68 043 = 73 317)

Determinar a percentagem pedida (52%)

#### 2.º Processo

Determinar o número total de votos (68 043)

Determinar a percentagem de votantes (48%)

Determinar a percentagem pedida (52%)

Qualquer que seja o processo utilizado, a cotação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Resolução correcta ..... 10

Resolução completa, mas parcialmente correcta ..... 5 a 9

Neste nível, a cotação deve ser atribuída de acordo com as seguintes desvalorizações:

Erros ocasionais de contas..... -1

Resultado final não arredondado às unidades ou incorrectamente arredondado ..... -1

Não inclusão do número de votos brancos e nulos no total de votos..... -3

Outras situações ..... 0

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

*Começemos por determinar, aplicando o método de Hondt, o número de mandatos de cada força política. No quadro seguinte, apresentam-se os quocientes que se obtêm dividindo o número de votos de cada partido pelos divisores 1, 2, 3, 4, ..., 11, destacando os onze maiores.*

	A	B	C	D	E	F
Número de votos / 1	28799,0	17437,0	11959,0	4785,0	948,0	340,0
Número de votos / 2	14399,5	8718,5	5979,5	2392,5	474,0	170,0
Número de votos / 3	9599,7	5812,3	3986,3	1595,0	316,0	113,3
Número de votos / 4	7199,8	4359,3	2989,8	1196,3	237,0	85,0
Número de votos / 5	5759,8	3487,4	2391,8	957,0	189,6	68,0
Número de votos / 6	4799,8	2906,2	1993,2	797,5	158,0	56,7
Número de votos / 7	4114,1	2491,0	1708,4	683,6	135,4	48,6
Número de votos / 8	3599,9	2179,6	1494,9	598,1	118,5	42,5
Número de votos / 9	3199,9	1937,4	1328,8	531,7	105,3	37,8
Número de votos / 10	2879,9	1743,7	1195,9	478,5	94,8	34,0
Número de votos / 11	2618,1	1585,2	1087,2	435,0	86,2	30,9

*Do quadro anterior resulta que o partido A elegeu seis vereadores, o partido B, três, e o partido C, dois.*

*Se o partido D tivesse obtido mais 15 votos, teria ficado com 4800 votos.*

*O quociente da divisão de 4800 por 1, que é 4800, ultrapassa o quociente 4799,8.*

*Portanto, se o partido D tivesse obtido mais 15 votos, elegeria o seu cabeça-de-lista, em prejuízo do partido A, o qual, em vez de seis vereadores, elegeria apenas cinco.*

*O partido A, que conseguiu maioria absoluta de mandatos, seis em onze, deixaria de ter essa maioria absoluta, tendo, por isso, necessidade de dialogar com a oposição. É neste contexto que surge a frase do cabeça-de-lista do partido D.*

Tal como é exigido no enunciado e o exemplo ilustra, para que uma composição possa ser considerada correcta e completa, deverá estar de acordo com os seguintes pontos:

- cálculo do número de mandatos obtidos por cada força política;
- conclusão de que o partido A teria eleito menos um vereador, em benefício do partido D, se este partido tivesse tido mais 15 votos;
- explicação do sentido da frase do cabeça-de-lista do partido D.

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada (ver critério geral 7).

Conteúdo	Forma	Nível 3	Nível 2	Nível 1
Analisa correctamente os três pontos		40	38	36
Analisa correctamente apenas os dois primeiros pontos		30	28	26
Analisa correctamente apenas o primeiro ponto		14	12	10

**Nota:** não se exige o cálculo/apresentação de todos os quocientes que figuram na tabela acima, mas apenas dos necessários para a análise pretendida; eventuais erros de contas no cálculo desses quocientes, que não afectem as conclusões, não devem ser tomados em consideração.

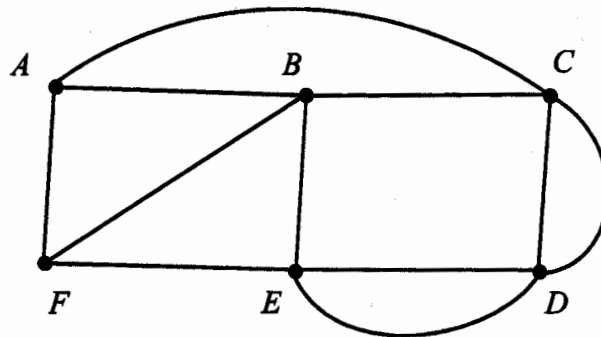
2.1. .... 15

Construção do grafo (ver nota)..... 5

Referência ao facto de o vértice A e/ou o vértice F terem grau ímpar ..... 5

Conclusão: como é condição necessária, para que um grafo admita um circuito de Euler, que todos os seus vértices sejam de grau par, este grafo não admite um circuito de Euler, pelo que o grupo tem de percorrer pelo menos um caminho mais do que uma vez. .... 5

Nota: apresenta-se a seguir um exemplo de grafo que modela o mapa.



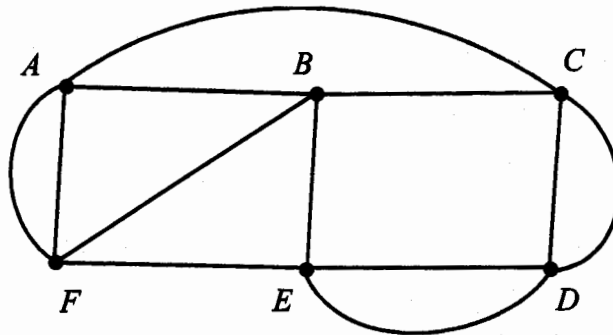
2.2. .... 15

Eulerização do grafo (ver nota 1) ..... 5

Indicação de um percurso (ver nota 2) ..... 10

Notas:

1. Apresenta-se a seguir um exemplo de eulerização do grafo:



2. Apresenta-se a seguir um exemplo de um percurso: *ACDEDCBEFBAFA*



**2.3. .... 20**

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

*Dado que a realidade é complexa, torna-se necessária, para a resolução de problemas concretos, a construção de modelos que a simplifiquem, no sentido de eliminar os aspectos acessórios. Na situação apresentada, são completamente irrelevantes, para a resolução do problema proposto, aspectos como os lagos, as fontes, as árvores, os nomes dos locais e as curvas dos caminhos, aspectos que não aparecem no modelo.*

Tal como é exigido no enunciado e o exemplo acima ilustra, para que uma composição possa ser considerada correcta e completa, deverá estar de acordo com os seguintes pontos:

- explicação da necessidade de simplificar a realidade e de distinguir o essencial do acessório;
- referência aos aspectos que foram simplificados, relativamente à situação original.

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada (ver critério geral 7).

Conteúdo	Forma	Nível 3	Nível 2	Nível 1
Abordagem correcta dos dois pontos		20	19	18
Abordagem correcta de apenas um ponto		10	9	8

**3.1. .... 15**

Determinar a percentagem de inquiridos que consideraram ter um elevado conhecimento sobre questões da UE (6%)..... 5

Determinar o número de inquiridos que consideraram ter um elevado conhecimento sobre questões da UE (6% de 15 800 = 948)..... 10

**3.2. .... 20**

Justificar que o primeiro quartil é 3 (A percentagem relativa aos níveis 1 e 2 é, ao todo, 22%. A percentagem relativa aos níveis 1, 2 e 3 é, ao todo, 38%. Como  $22\% < 25\% < 38\%$ , conclui-se que o primeiro quartil é 3.) ..... 10

Justificar que a mediana é 4 (A percentagem relativa aos níveis 1, 2 e 3 é, ao todo, 38%. A percentagem relativa aos níveis 1, 2, 3 e 4 é, ao todo, 55%. Como  $38\% < 50\% < 55\%$ , conclui-se que a mediana é 4.) ..... 10

**Nota:**

Se o examinando se limitar a apresentar as definições de 1.º quartil e de mediana, deverá ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à sua resposta.

Esta questão pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Designemos por  $A$  o acontecimento «*ser português*» e por  $B$  o acontecimento «*ter-se auto-avaliado no nível 1*».

Identificação da probabilidade pedida com  $P(B|A)$  ..... 3

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \times P(B)}{P(A|B) \times P(B) + P(A|\bar{B}) \times P(\bar{B})} \dots\dots\dots 3$$

$P(A|B) = 0,2$  ..... 3

$P(B) = 0,1$  ..... 3

$P(A|\bar{B}) = 0,05$  ..... 3

$P(\bar{B}) = 0,9$  ..... 3

Resultado final correctamente apresentado (31%) ..... 2

2.º Processo

Número de inquiridos que se auto-avaliaram no nível 1  
(10% de 15 800 = 1 580)..... 3

Número de inquiridos portugueses que se auto-avaliaram no nível 1  
(20% de 1 580 = 316)..... 3

Número de inquiridos que se auto-avaliaram num nível superior a 1  
(90% de 15 800 = 14 220)..... 3

Número de inquiridos portugueses que se auto-avaliaram num nível superior a 1 (5% de 14 220  $\approx$  711)..... 3

Probabilidade pedida =  $\frac{316}{316 + 711}$  ..... 6

Resultado final correctamente apresentado (31%) ..... 2

3.4. .... 20

Valores de  $\hat{p}$ ,  $z$  e  $n$  do intervalo

$$\left[ \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] \dots\dots\dots 18$$

$\hat{p} = 0,1$ .....	6
$n = 15\,800$ .....	6
$z = 2,576$ .....	6

Intervalo pedido ( $]0,094; 0,106[$ ) .....

3.5. .... 25

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

*A margem de erro de um intervalo de confiança é metade da amplitude do intervalo.*

Suponhamos, então, que  $\hat{p} = 0,5$  e que  $n = 100$ . Para um intervalo com uma confiança de 95%, centrado em  $\hat{p}$ , tem-se que  $z = 1,96$ .

Portanto,  $z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$  toma o valor 0,098.

Nestas condições, um intervalo de confiança para  $p$  é  $]0,5 - 0,098; 0,5 + 0,098[$ , ou seja,  $]0,402; 0,598[$ .

Este intervalo tem uma margem de erro de 0,098.

Experimentemos agora atribuir a  $n$  um valor superior a 100.

Seja, por exemplo,  $n = 500$ . Nestas circunstâncias,  $z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$  toma o valor 0,044.

Portanto, um intervalo de confiança para  $p$  é  $]0,5 - 0,044; 0,5 + 0,044[$ , ou seja,  $]0,456; 0,544[$ .

Este intervalo tem uma margem de erro de 0,044.

Se aumentássemos ainda mais o valor de  $n$ , a margem de erro do intervalo diminuiria ainda mais.

De um modo geral, podemos afirmar que, quando, mantendo a confiança, se aumenta a dimensão da amostra, a margem de erro diminui.

Tal como é exigido no enunciado e o exemplo apresentado ilustra, para que uma composição possa ser considerada correcta e completa, deverá estar de acordo com os seguintes pontos:

- definição correcta de margem de erro de um intervalo de confiança para uma proporção;
- simulação da variação da margem de erro de um intervalo de confiança, em função da dimensão da amostra;
- relação entre o aumento da dimensão da amostra e a diminuição da margem de erro.

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada (ver critério geral 7).

<b>Conteúdo</b>	<b>Forma</b>	<b>Nível 3</b>	<b>Nível 2</b>	<b>Nível 1</b>
Abordagem correcta dos três pontos		25	24	23
Abordagem correcta de apenas dois pontos		17	16	15
Abordagem correcta de apenas um ponto		8	7	6

