Exame MACS- Probabilidades

Probabilidades: Função massa de probabilidades ou função distribuição de probabilidade ou modelo de probabilidade:

Nos modelos de probabilidade: há uma primeira fase em que colocamos uma tabela e o objectivo é fazer as probabilidades todas. Não esquecer que a soma de todas as probabilidades tem de dar sempre 1. (e se estiver em percentagem, de de dar 100%)

Exemplo:

Xi	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Pi	*0.5*	*0.1*	*0.3*	*0.06*	*0.04*

simbolos menor < maior: > estes não incluem o próprio número.
Apenas inclui o próprio número se for ≤ ou ≥

Probabilidades: Não esquecer a distinção entre " com reposição" e "sem reposição", porque o número de casos possíveis e favoráveis vai mudando quando náo há reposição...

Exemplo:

) *Num aquário existem 7 peixes vermelhos, 5 dourados e 2 azuis. Retiram-se ao acaso e sucessivamente 3 peixes sem reposição.*
Qual a probabilidade de
1.1) *saírem todos da mesma cor?* ***1.2)*** *saírem 1 azul e 2 dourados?*

Problemas do tipo "condicionada" e Probabilidades totais,
não esquecer as regras:

P(D)=P(D/A)*P(A) + P(D/B)*P(B)+ P(D/C)*P(C) probab. total

$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ (definição de condicionada)

e que $P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)$ Intersecção

e ainda
a regra de Bayes.......

$P(B/A)=\dfrac{P(A/B)P(A)}{P(B)}$ Regra de Bayes- para quando sabemos uma condicionada e pretendemos saber a condicionada contrária. Exemplos: Sabemos P(A/B) e pretendemos calcular P(B/A).

Lembrar que em problemas deste tipo devemos escrever todas as probabilidades apresentadas pelo enunciado e indicar o que significa,,, p(A) ou PA/B) ou P(B/A) ou P(A.∩B) ... é sempre boa sugestão representar os dados numa árvore de probabilidade, pois isso melhora a visualização..... também podemos usar uma tabela de intersecções para resolver o mesmo tipo de problema. Por vezes a tabela dá mais trabalho a elaborar mas pode facilitar a obtenção dos resultados pedidos....

Exemplos:

1) *Três máquinas produzem peças do mesmo tipo. Sabe-se que B produz metade de A e o mesmo que C. Além disso, 2% das peças produzidas tanto por A como por B são defeituosas e 4% das produzidas por C também.*
A produção das três máquinas é misturada e extrai-se, ao acaso, uma peça. Qual é a probabilidade de:

1.1) *não ser defeituosa.?*
1.2) *ser defeituosa, sabendo que foi produzida pela máquina B?*
1.3) *ter sido produzida pela máquina B, sabendo que não tem defeito?*
1.4) *ser defeituosa e ter sido produzida pela máquina B?*

2) *Sejam A e B dois acontecimentos tais que: P(A)= 0.6 e P(B)= 0.2*
Determine P(A|B) supondo que
2.1) *Os acontecimentos A e B são incompatíveis.*
2.2) *Os acontecimentos A e B são independentes.*
2.3) *P(B|A) =0.1*

__3)__No Centro de Saúde de Barcelos trabalham três pediatras: o Dr. António, o Dr. Berto e o Dr. Carlos. Em 40% das vezes que uma pessoa se dirige ao Centro de Saúde para uma consulta de pediatria é o Dr. António o pediatra de serviço. Nas restantes vezes, os outros dois pediatras dividem os atendimentos em igual proporção. Em cada consulta, o pediatra de serviço pode optar por oferecer ou não um balão à criança. Sabe-se que o Dr. António o faz em 30% das suas consultas no Centro, o Dr. Berto em 45% e a Dr. Carlos em 60%.

A Célinha foi à consulta de pediatria do Centro e recebeu um balão. Qual a probabilidade de ter sido atendida pelo Dr. Berto?

Modelo Poisson

O modelo de Poisson é para contar o número de sucessos num determinado período de tempo e a fórmula é sempre dada.

V.a. Poisson: $P(X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad E(X) = \lambda \quad Var(X) = \lambda$

Exemplo: POISSON

7) *Na ponte Vasco da Gama, o número de automóveis (em centenas) que a atravessam, por minuto, é uma variável*
aleatória que tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 3{,}2$

7.1 *Determine o número médio de automóveis que atravessam a ponte Vasco da Gama por hora.*

7.2 *Qual é a probabilidade que, em determinado minuto, a ponte Vasco da Gama seja atravessada por:*

7.2.1) *Nenhum automóvel?* ***7.2.2)*** *algum automóvel?* ***7.2.3)*** *420 automóveis?*

Geométrico

O modelo Geométrico é para obter um sucesso ao fim de um certo número de tentativas.... habitualmente nem precisamos saber a fórmula de cor., no entanto a fórmula é:

Modelo Geométrico: $P(X = k) = (1-p)^{k-1} \times p \quad E(X) = \frac{1}{p} \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Exemplo: Geométrico

1) *Numa linha de montagem de monitores de computadores, a probabilidade de um monitor chegar ao fim da montagem com defeito é igual a 0.020.*
Calcule a probabilidade de, em determinado dia, o primeiro monitor a chegar ao fim da linha de montagem com algum defeito ser o oitavo.

Modelo Uniforme:

$P(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a}$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$

EXEMPLO- Uniforme

5) *Numa pastelaria, confeccionam-se bolos para uma festa. O tempo de cozedura dos bolos é uma variável aleatória, que varia* <u>*uniformemente*</u> *entre os 38 e 76 minutos.*

5.1) *Determine o tempo médio de cozedura de um bolo.*

5.2) *Calcule a probabilidade de um bolo escolhido ao acaso, ter um tempo de cozedura:* ***5.2.1)*** *Superior a 45 minutos.* ***5.2.2)*** *Entre 43 e 55 minutos.*

5.2.3) *Inferior a 60 minutos.*

Exponencial

O modelo exponencial é para calcular a probabilidade de termos um certo tempo de espera e a fórmula é sempre dada

Modelo exponencial $P(a \le X \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Exemplo: Exponencial

6) *Num determinado consultório, o tempo de espera, em minutos, entre duas pessoas a serem atendidas é uma variável aleatória e pode ser representado por um modelo exponencial de valor médio igual a 26 minutos.*
6.1) *Determine o parâmetro λ para a situação descrita.*
6.2) *Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre duas pessoas seja:*
6.2.1) *superior a 32 minutos.* ***6.2.2)*** *superior a 22 mas inferior a 19 minutos.*

Binomial
O modelo binomial é para contar sucessos ou insucessos numa situação em que os acontecimentos ocorrem sempre com a mesma probabilidade.
A fórmula é sempre dada.

Modelo binomial: $p(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$ $E(X) = n.p$ *Var(X)=* *n.p.*(1-*p*)

Exemplo: Binomial
3) *Numa fábrica de confecções, estima-se que 20% das peças saem com defeito. Analisou-se um lote constituído por dez peças. Qual é a probabilidade de, nesse lote,*

3.1) *existirem 8 peças com defeito?* (sugestão: n=10; K=8; p=0.2)

3.2) *haver mais do que uma peça com defeito?*

Modelo Normal.

O modelo normal é o mais importante de todos. a principal razão tem a ver com a sua grande aplicação em muitos fenómenos da realidade tal com as alturas das pessoas , etc... e também porque é muito usado na Inferência estatística, nomeadamente através do teorema do limite central.

Este modelo tem a média no centro, é simétrico, na zona do centro é onde existe maior probabilidade e o seu gráfico é parecido a uma linha curva com a forma de um sino achatado.

Numa primeira fase, aprendemos a resolver problemas com as regras dos 68, 95, 99.7, e já saiu por duas vezes no exame este tipo de questão:

Exemplo

5)*Considere a variável aleatória X, « massa, em quilogramas, de uma saca de cereais escolhida ao acaso de entre as sacas de cereais que, por dia, são embaladas numa determinada fábrica».*
A variável aleatória X segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio igual a 100 quilogramas e desvio padrão igual a 6 quilogramas.
Note que : Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68,27\ \%$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95,45\ \%$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99,73\%$$

Escolhe-se aleatoriamente uma saca de cereais.
Determine um valor aproximado para a probabilidade de a saca escolhida apresentar uma massa compreendida entre 88 quilogramas e 118 quilogramas. Resolva esta questão tendo em conta as probabilidades acima apresentadas

TABELA da Normal

Também aprendemos que se pode calcular probabilidades do modelo normal usando uma tabela.

Recordemos que para isso é preciso " normalizar " o standardizar" primeiro a variável. Para isso temos de subtrair a média e dividir pelo desvio-padrão. Só depois é que podemos usar a Tabela da Normal. Devemos também fazer um esboço do gráfico para compreendermos certas passagens e simplificações.

Nota: o uso da tabela da normal ainda não saiu nos exames, mas pode sair. Para tal, terão de apresentar a tabela.

Exemplo: Normal /Tabela

10) *Use a tabela da normal para resolver a questão que se segue e apresente todas as justificações.*

O tempo que um operário demora a realizar uma determinada tarefa é uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio igual a 74 minutos e desvio padrão igual a 10 minutos.

Determine a probabilidade de o operário demorar, na realização da tarefa:

10.1) *Menos de 68 minutos.* ***10.2)*** *Mais de 93 minutos.* ***10.3)*** *Entre 63 e 78 minutos.*

1) *Numa padaria, a quantidade de farinha utilizada por semana, é uma variável aleatória que se considera ter uma distribuição normal de média igual a 500 quilogramas e desvio padrão igual a 35 quilogramas.*

1.1) *Calcule a probabilidade de, numa certa semana, a quantidade de farinha a ser utilizada ser entre 400 e 600 quilogramas.*

1.2) *Suponha que, numa determinada semana, a referida padaria tem um stock de farinha de 670 quilogramas e não tem qualquer hipótese de se reabastecer. Calcule a probabilidade de ter de parar a produção nessa semana.*

X	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5357	.5596	.5636	.6575	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6625	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.5315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8780	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9725	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9901	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9985	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9989	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	9997	.9997	.9997	.9997	.9998

<u>Nota importante:</u>
No modelo normal, podemos usar a calculadora para verificar se está certo.

Se não soubermos fazer de algum outro modo que seja exigido, devemos usar a calculadora gráfica, obter o resultado e apresentá-lo.