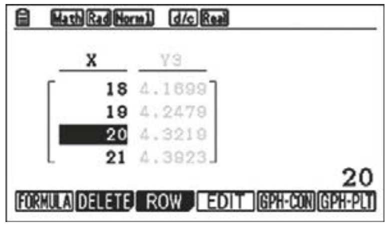
25.2 Queremos determinar o valor de *n*, de modo que:

$D(n) \geq 4{,}3 \Leftrightarrow \log_2(n) \geq 4{,}3$

Usamos a tabela de valores da função na calculadora (após a introdução da função):



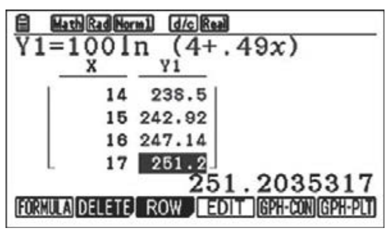
Podemos verificar que o primeiro a ultrapassar 4,3 é 4,3219 e corresponde ao valor $x = 20$. Assim, é necessário um número mínimo de 20 espécies no aquário para que a diversidade não seja inferior a 4,3.

26.1 $2018 - 2006 = 12 \rightarrow$ número de anos decorridos

Assim, $A(12) = 100\ln(4 + 0{,}49 \times 12) \approx 229{,}05\ldots$

O número de unidades de sangue a recolher em 2018 será de, aproximadamente, 229 milhares.

26.2 Podemos recorrer à calculadora gráfica para observar a tabela de valores da função A:



Pretendemos determinar o menor valor de *t* para o qual $A(t) \geq 250$. Concluímos que terão de passar 17 anos até que o número de unidades de sangue recolhidas ultrapasse as 250 mil por ano. Assim, as necessidades do país serão asseguradas em $2006 + 17 = 2023$.

Tema 3 – Exercícios globais (pág. 116)

1. B	**3.** B	**5.** A	**7.** A	**9.** D
2. C	**4.** B	**6.** C	**8.** C	**10.** D

11.1 Apenas existe no grafo D, pois é o único onde todos os vértices têm grau par.

11.2 A: duplicar a aresta *AE*

B: duplicar as arestas *DG* e *GH*

C: duplicar as arestas *AE* e *BC*

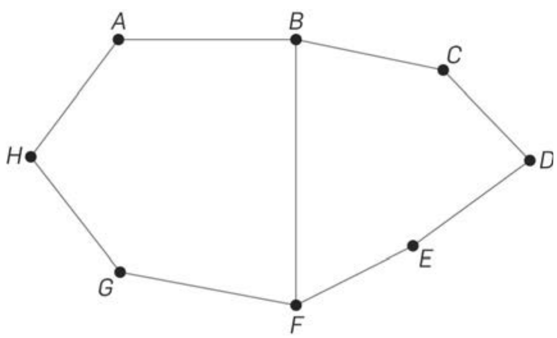
12. A – É possível: *A B C F E D A*

B – Não é possível

C – É possível: *A B C D E A*

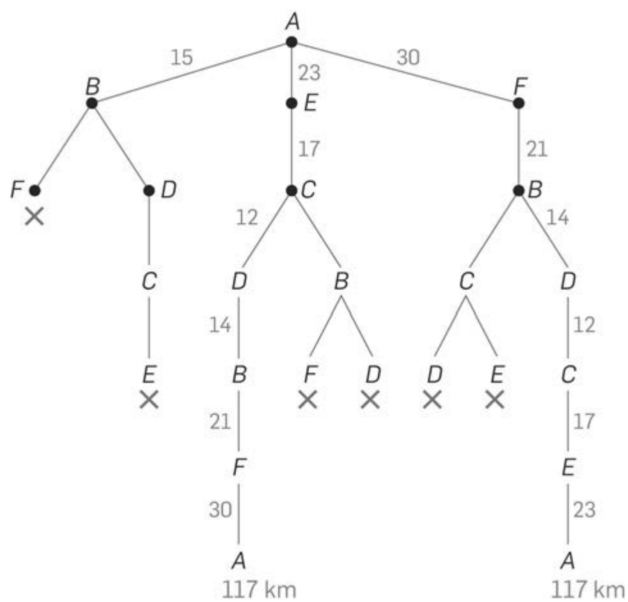
D – Não é possível

13.



Por exemplo: tem um circuito hamiltoniano (*A B C D E F G H A*), mas não tem circuito euleriano, pois tem, pelo menos, um vértice de grau ímpar (*B* e *F*).

14.1



Só há dois percursos possíveis e inversos: *A E C D B F A* ou *A F B D C E A*, com um total de 117 quilómetros.

14.2 $B \xrightarrow[14]{} D \xrightarrow[12]{} C \xrightarrow[17]{} E \xrightarrow[23]{} A \xrightarrow[30]{} F$ 96 km

$C \xrightarrow[12]{} D \xrightarrow[14]{} B \xrightarrow[21]{} F \xrightarrow[30]{} A \xrightarrow[23]{} E$ 94 km

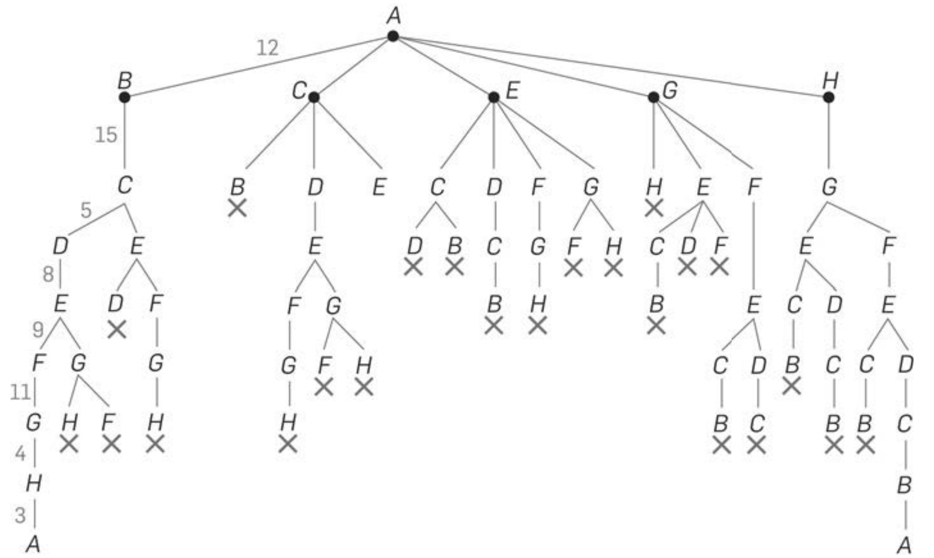
$D \xrightarrow[12]{} C \xrightarrow[17]{} E \xrightarrow[23]{} A \xrightarrow[30]{} F \xrightarrow[21]{} B$ 103 km

$E \xrightarrow[17]{} C \xrightarrow[12]{} D \xrightarrow[14]{} B \xrightarrow[21]{} F \xrightarrow[30]{} A$ 94 km

$F \xrightarrow[21]{} B \xrightarrow[14]{} D \xrightarrow[12]{} C \xrightarrow[17]{} E \xrightarrow[23]{} A$ 87 km

Escolheria a escola A ou F (87 quilómetros, não tendo de regressar à primeira escola).

15.1



Só há dois percursos possíveis e são inversos: *A B C D E F G H A* e *A H G F E D C B A*.

15.2 Ambos têm 67 unidades de comprimento.

15.3 $A \to H \to G \to F \to E \to D \to C \to B \to A$: 67

$B \to A \to H \to G \to F \to E \to D \to C \to B$: 67

$C \to D \to E \to F \to G \to H \to A \to B \to C$: 67

$D \to C \to B \to A \to H \to G \to F \to E \to D$: 67

$E \to D \to C \to B \to A \to H \to G \to F \to E$: 67

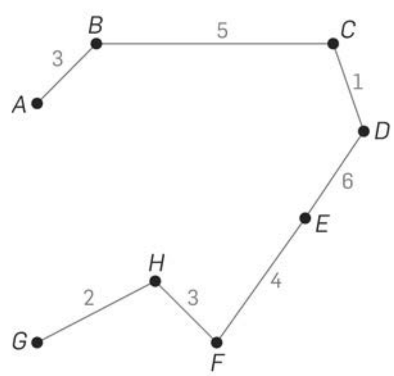
$F \to E \to D \to C \to B \to A \to H \to G \to F$: 67

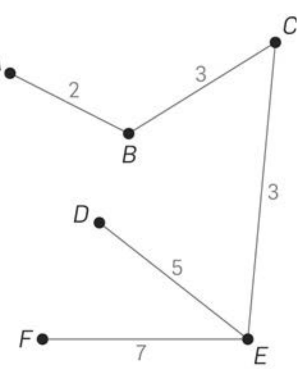
$G \to H \to A \to B \to C \to D \to E \to F \to G$: 67

$H \to A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H$: 67

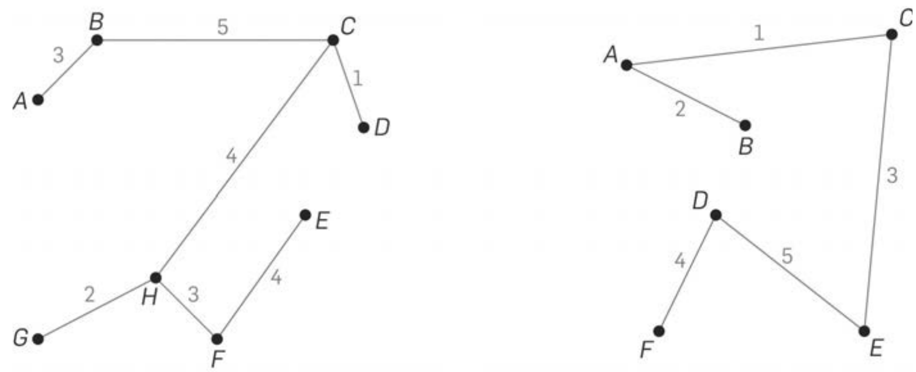
Partindo de qualquer vértice, a distância total é sempre igual a 67.

16.1 Por exemplo:





16.2 Por exemplo:



17.1 No grafo existem dois vértices de grau ímpar (C e F têm grau 3), logo, não é possível encontrar um circuito de Euler. Assim, as pretensões do António não podem ser todas satisfeitas.

17.2 Consideremos os pesos das arestas sugeridas pelo João e a respetiva soma:

AB – FG – BF – BE – CE – CD

$1253+832+938+712+941+911=5587$ metros

Aplicando o algoritmo proposto pelo João:

Passo 1: as arestas com menor peso são *BE* – 712 e *FG* – 832.

Passo 2: a aresta seguinte com menor peso e que não fecha circuito é *CD* – 911.

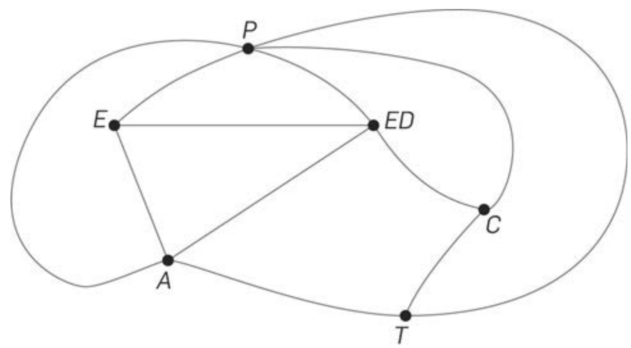
Passo 3: segue-se a aresta *BF* – 938, depois a aresta *EC* – 941 e, por fim, a aresta *AG* – 1248.

O comprimento total para a proposta do João é:

$712+832+911+938+941+1248=5582$ metros

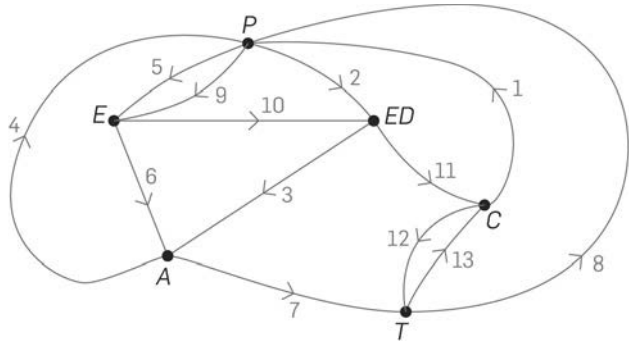
Assim, a empresa deverá optar pela proposta do João, pois utiliza menos 5 metros de fibra ótica do que a proposta do José.

18. Um grafo representativo desta planta terá como vértices cada um dos espaços do recinto; as arestas serão as ligações existentes entre cada um desses espaços («as portas»). Para simplificar, vamos identificar cada vértice pela(s) primeira(s) letra(s) do espaço que representa: por exemplo, *P* representa o pátio:



Os vértices C, E, P e T têm grau ímpar, o que inviabiliza a existência de um circuito de Euler, o qual seria necessário para a ronda ao recinto que a funcionária pretendia. Para solucionar o problema, teremos de eulerizar o grafo, isto é, duplicar o menor número de arestas de modo a que todos os vértices fiquem com grau par. Conseguimos uma boa eulerização duplicando as arestas *TC* e *PE*, passando os vértices T, C, P e E a ter grau par, como os restantes.

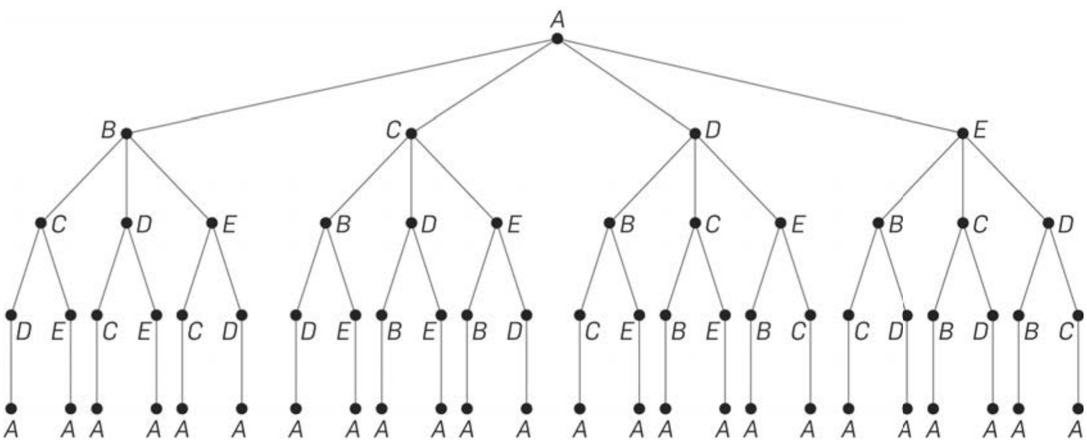
A ronda pretendida para a funcionária pode ser, por exemplo:



C – P – ED – A – P – E – A – T – P – E – ED – C – T – C

19.1 São seis os percursos que começam em *A* e seguem de imediato para *D*:
A D E C B; *A D E B C*; *A D B C E*; *A D B E C*; *A D C E B*; *A D C B E*

19.2 Podemos fazer um diagrama em árvore para mais facilmente contar os percursos possíveis:



Contámos 24 percursos. No entanto, como para cada um existe o percurso no sentido contrário (*A B C D E A* é idêntico a *A E D C B A*, em número de quilómetros), existem $24:2=12$ voltas distintas que podem fazer parte da lista do Miguel.

20. 1.º caso: a estrada que liga *A* a *B* está transitável.

Algoritmo: 1.º passo: seleciona-se *F*.
2.º passo: seleciona-se *A* (mais próxima).
3.º passo: seleciona-se *B*, de seguida *D*, depois *C* e regressamos a *F*.

Distância total: $18+28+32+48+20=146$ km

2.º caso: a estrada que liga *A* a *B* está intransitável.

Algoritmo: 1.º passo: seleciona-se F.
2.º passo: seleciona-se *A* (mais próxima).
3.º passo: seleciona-se *D* (não pode ser *B* porque está intransitável), de seguida *B*, depois *C* e regressamos a *F.*

Distância total: $18+30+32+36+20=136$ km

A afirmação constante do anúncio é falsa, pois a distância total a percorrer caso a estrada que liga *A* a *B* esteja intransitável é inferior (em 10 quilómetros) e não superior.

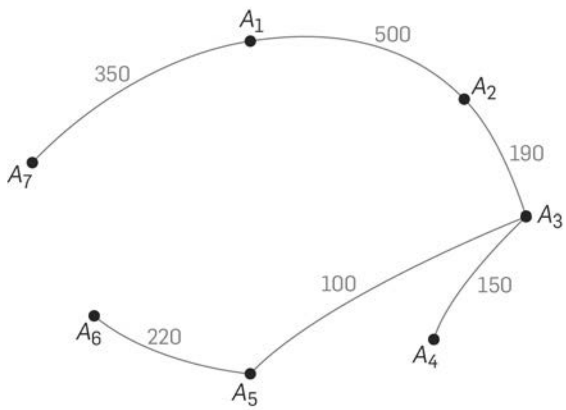
21. Começamos por ordenar por ordem crescente as distâncias entre cada par de pavilhões:

$A_3 \underset{100}{\text{———}} A_5$; $A_3 \underset{150}{\text{———}} A_4$; $A_2 \underset{190}{\text{———}} A_3$; $A_2 \underset{200}{\text{———}} A_5$; $A_4 \underset{220}{\text{———}} A_5$;

$A_5 \underset{220}{\text{———}} A_6$; $A_4 \underset{240}{\text{———}} A_6$; $A_2 \underset{340}{\text{———}} A_6$; $A_1 \underset{350}{\text{———}} A_7$; $A_1 \underset{500}{\text{———}} A_2$;

$A_6 \underset{650}{\text{———}} A_7$; $A_1 \underset{730}{\text{———}} A_6$

O grafo, nas condições impostas, será:



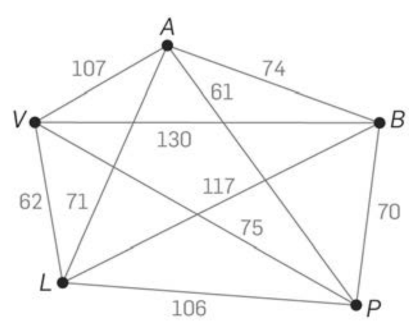
Uma vez selecionadas $7-1=6$ arestas, calculamos o comprimento total de cabo de fibra ótica:

$100+150+190+220+350+500=1510$ metros

O custo mínimo para a instalação será:

$1510 \times 3,40 = 5134$ €

22. Um grafo ponderado representativo da situação pode ser (os vértices estão designados pela primeira letra de cada cidade):



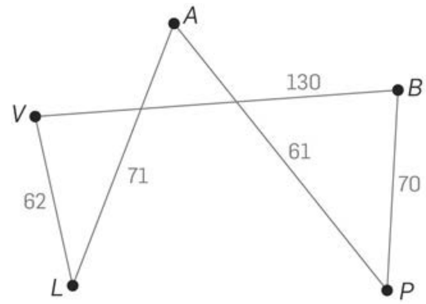
Vamos aplicar cada uma das opções para saber se o Luís tem razão ou não.

Opção 1: $A \xrightarrow[61]{} P \xrightarrow[70]{} B \xrightarrow[117]{} L \xrightarrow[62]{} V \xrightarrow[107]{} A$

Distância total: $61+70+117+62+107=417$ km

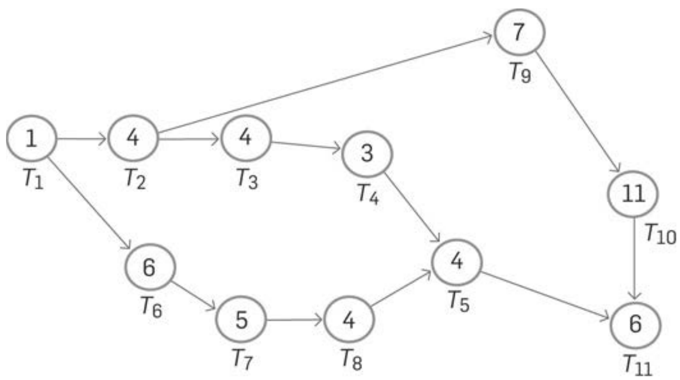
Opção 2: $A \underset{31}{\text{———}} P$; $L \underset{62}{\text{———}} V$; $B \underset{70}{\text{———}} P$; $A \underset{71}{\text{———}} L$; $A \underset{74}{\text{———}} B$; $P \underset{75}{\text{———}} V$;

$P \underset{106}{\text{———}} L$; $A \underset{107}{\text{———}} V$; $B \underset{117}{\text{———}} L$; $B \underset{130}{\text{———}} V$



Distância total: $61+62+70+71+130=394$ km
Percurso: $A-P-B-V-L-A$ (ou o inverso)
O Luís não tem razão.

23.1



23.2 O António demora $1+4+7+11+6=29$ dias a concluir o projeto, pelo que cumpre o prazo estipulado.

23.3 O caminho crítico para este projeto é $T_1-T_2-T_9-T_{10}-T_{11}$.

24.1 $6+2\times 2=10$ €

24.2 $6+14\times 2=34$ €

24.3 $P(h)=6+2(h-1),\ h\in \mathbb{N}$

25.1 $C_5=10\ 000+5\times 10\ 000\times 0{,}1=15\ 000$ €

Rendeu $15\ 000-10\ 000=5000$ €

25.2 $50\ 000=10\ 000+n\times 10\ 000\times 0{,}1 \Leftrightarrow 1000n=40\ 000 \Leftrightarrow n=40$

Ao fim de 40 anos.

25.3 $50\ 000=10\ 000\times 1{,}10^n \Leftrightarrow 1{,}10^n=5 \Leftrightarrow n\approx 16{,}88631$

Ao fim de, aproximadamente, 17 anos.

26. $P(20)=6000\times 0{,}92^{20}\approx 1132{,}16$

Terá cerca de 1132 habitantes.

27. $2000 = V_0 \times 1{,}10^3 \Leftrightarrow V_0 \approx 1502{,}629602$

Ganhava cerca de 1502,63 €.

28.1 $P_N(n) = 30\ 000 \times 1{,}12^{\frac{n}{10}}$, *n* anos

$P_P(n) = 50\ 000 \times 1{,}07^{\frac{n}{10}}$

28.2 $30\ 000 \times 1{,}12^{\frac{n}{10}} = 50\ 000 \times 1{,}07^{\frac{n}{10}} \Leftrightarrow \left(\frac{1{,}12}{1{,}07}\right)^{\frac{n}{10}} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{n}{10} = 11{,}185 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 111{,}85 \Leftrightarrow n \approx 112$

Ao fim de, aproximadamente, 11 décadas a população dos dois concelhos é igual.

29.1 $V_x = 1200 \times 12 = 14\ 400$ € 1 ano

$V_y = 1000 \times 12 = 12\ 000$ €

Deve escolher a empresa X.

29.2 $V_x = 14\ 400 + 12 \times 1450 = 31\ 800$ €

$V_y = 12\ 000 + 12 \times 1300 = 27\ 600$ €

Deve escolher a empresa X.

29.3 $V_x = 12(1200 + 1450 + 1700 + 1950 + 2200) = 102\ 000$ €

$V_y = 12(1000 + 1300 + 1690 + 2197 + 2856{,}1) = 108\ 517{,}2$ €

Deve escolher a empresa Y.

30.1 $M_A(4) = 1000 \times 1{,}015^4 \approx 1061{,}36$ €

$M_B(4) = 1000 + 4 \times 0{,}017 \times 1000 \approx 1068$ €

A modalidade B é mais vantajosa.

30.2 $1000 \times 1{,}015^n > 1000(1 + 0{,}017n) \Leftrightarrow 1{,}015^n > 1 + 0{,}017n \Leftrightarrow n > 17{,}43746$

(calculadora gráfica)

A partir do 18.º ano, a modalidade A passa a ser mais vantajosa.

31.1 Parque A: $0{,}8 + 1{,}1 + 1{,}4 = 3{,}3$ €

Parque B: $0{,}8 + 0{,}8 + 1{,}3 + 0{,}8 \times 1{,}3^2 = 3{,}192$ €

31.2 5 horas: P_A: $3{,}3 + 1{,}7 + 2 = 7$ €

P_B: $3{,}192 + 0{,}8(1{,}3^3 + 1{,}3^4) \approx 4{,}04$ €

6 horas: P_A: $7 + 2{,}3 = 9{,}3$ €

P_B: $4{,}04 + 0{,}8 \times 1{,}3^5 \approx 7{,}75$ €

7 horas: P_A: $9,3+2,6=11,9$ €

P_B: $7,75+0,8\times 1,3^6 \approx 11,61$ €

8 horas: P_A: $11,9+2,9=14,8$ €

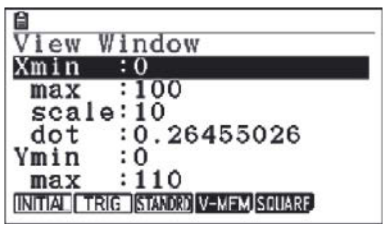
P_B: $11,61+0,8\times 1,3^7 \approx 16,63$ €

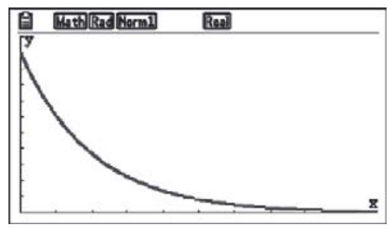
Se o carro estiver no parque oito horas ou mais, compensa ficar no Parque A.

32.1 $M(0)=100\times e^{-0,05\times 0}=100$ mg

32.2 $M(3)=100\times e^{-0,05\times 3}\approx 86,07079764\approx 86,07$ mg

32.3 Gráfico (calculadora)





32.4 O elemento tende a desintegrar-se completamente.

33.1 $g(0)=\dfrac{100}{1+e^0}=\dfrac{100}{2}=50$ centenas = 5000 gafanhotos

33.2 $g(10)=\dfrac{100}{1+e^{-0,03\times 10}}=\dfrac{100}{e^{-0,3}}\approx 57,4425$

Haverá cerca de 57,44 centenas de gafanhotos.

33.3 À medida que o número de dias aumenta, o número de gafanhotos tende a aumentar, aproximando-se das 100 centenas.

34.1 $\log 100=\log 10+0,7\log m \Leftrightarrow 2=1+0,7\log m \Leftrightarrow \log m=\dfrac{10}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=10^{\frac{10}{7}}\approx 26,83$ gramas

34.2 $\log x=\log 10+0,7\log 300 \Leftrightarrow \log x=1+0,7\log 300 \Leftrightarrow \log x\approx 2,733984878 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\approx 10^{2,734}\approx 541,98$ microlitros

35. Seja C_0 o dinheiro que recebeu quando completou o Ensino Secundário. Com uma taxa de juro anual de 1,50%, ao fim de:

- um ano, o Dinis terá $100+1,5=101,50\%$ de C_0, isto é, terá $C_0\times 1,0150$
- dois anos, terá $C_0\times 1,0150\times 1,0150=C_0\times 1,0150^2$

...

- seis anos, terá $C_0\times 1,0150^6=1530,82 \Leftrightarrow C_0\approx 1400$ €

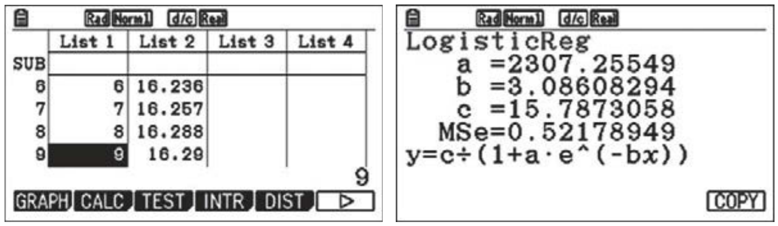
O Dinis recebeu 1400 € quando terminou o Ensino Secundário.

36.1 $N(6)=4{,}8\times 3^{0{,}15\times 6}\approx 12{,}902$

$N(5)=4{,}8\times 3^{0{,}15\times 5}\approx 10{,}942$

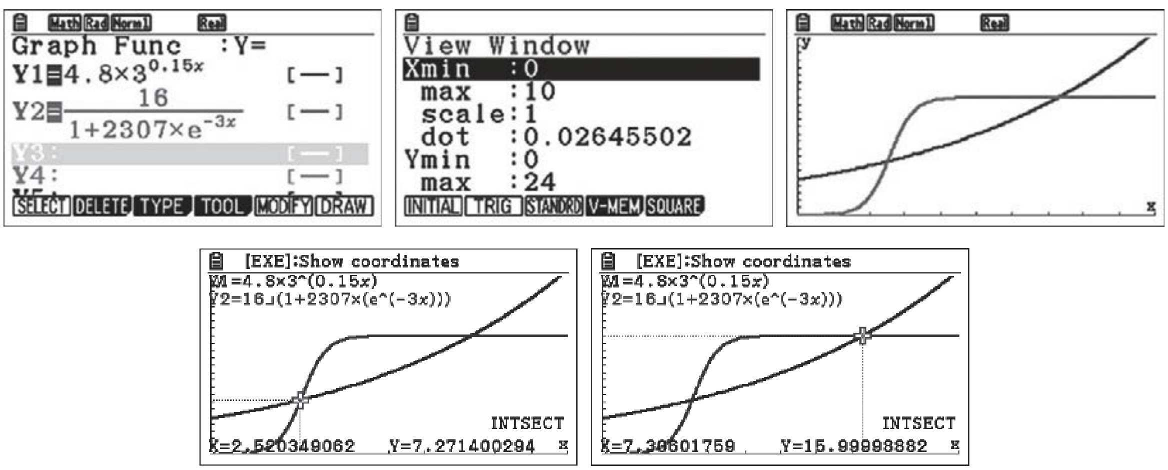
$N(6)-N(5)=1{,}96$, o que significa que, entre o quinto e o sexto mês, as vendas de telemóveis aumentaram cerca de 1,96 milhares.

36.2 $V(t)$ é um modelo logístico, pelo que, com o auxílio da calculadora:



$a\approx 2307{,}26$; $b\approx 3{,}09$ e $c\approx 15{,}79$

36.3 Podemos observar, com o auxílio da calculadora, o gráfico das duas funções (*N* a azul e *V* a vermelho), com a janela de visualização utilizada:



De facto, é verdade que, até ao final do segundo mês, o número *N* de telemóveis vendidos é maior do que o número *V* de computadores, uma vez que a curva representativa de *N* se encontra acima da curva representativa de *V*. A partir do terceiro mês, e até aproximadamente o final do sétimo, o número *V* de computadores vendidos é superior ao de telemóveis vendidos. A partir do oitavo mês, a representação gráfica da função *N* fica acima da representação gráfica de *V*. Logo, o número de telemóveis vendidos volta a ser superior. Assim, a afirmação é falsa.

37.1 $C_n=C+C\times n\times i$

$1680=1500+3000i\Leftrightarrow i=\dfrac{180}{3000}\Leftrightarrow i=0{,}06$

A taxa de juro trimestral é de 6%.

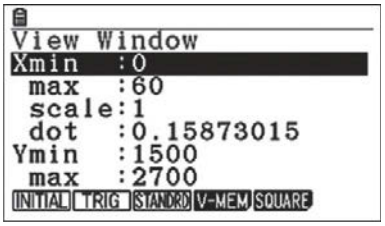
37.2 Ao analisar o capital no final de cada mês da conta *X*, verificamos que a variação é constante, pois de um mês para o seguinte aumenta 20 €, o que nos leva a optar por um modelo linear:

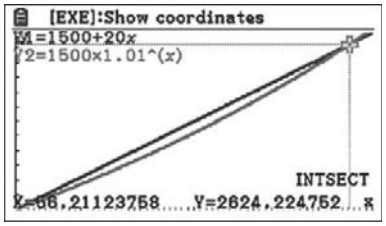
$y = 1500 + 20x$

Analisando a conta *Y*, verificamos que o capital no final de cada mês é 1,01 vezes maior do que no mês anterior, o que corresponde a um aumento mensal de 1%. Assim, leva-nos a optar por um modelo exponencial:

$y = 1500 \times 1{,}01^x$

Usando a calculadora gráfica para uma visualização simultânea das duas funções:





Podemos verificar que, no final do mês 56, o montante existente na conta *Y* ainda não era superior ao da conta *X*, mas, no final do mês 57, este facto já se verificava. Logo, a Carla tem razão na afirmação que fez.

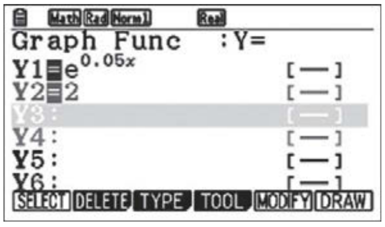
37.3 $N(10) = \dfrac{30}{1 + 16 \times e^{-1{,}15 \times 10}} \approx 29{,}995$

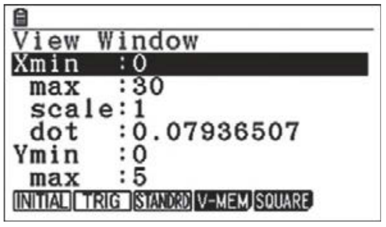
O número de aplicações feitas é de cerca de 30.

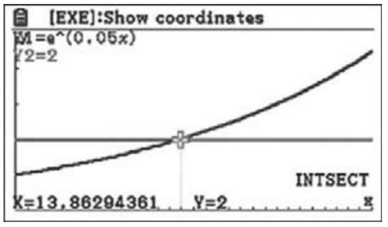
38.1 $P(0) = 1800 \times e^{0{,}05 \times 0} \approx 1800$

$P(t) = 2 \times 1800 \Leftrightarrow e^{0{,}05t} = 2$

Recorrendo à calculadora gráfica:

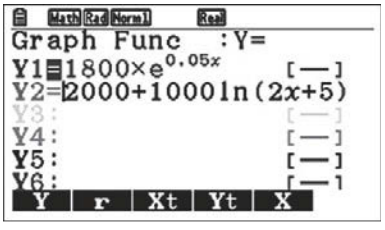


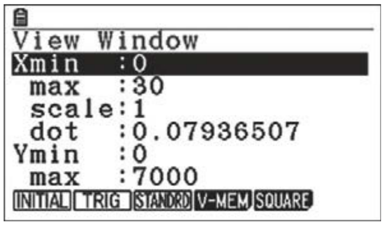


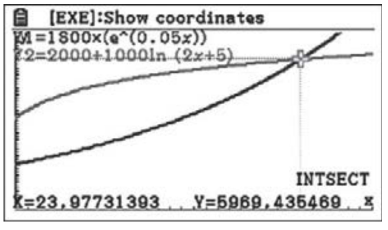


Serão necessários cerca de 14 anos para que o número de habitantes de Peso duplique.

38.2 Recorremos mais uma vez às potencialidades gráficas da calculadora, agora para resolver a condição $P(t) > N(t) \Leftrightarrow 1800 \times e^{0{,}05t} > 2000 + 1000\ln(2t+5)$:

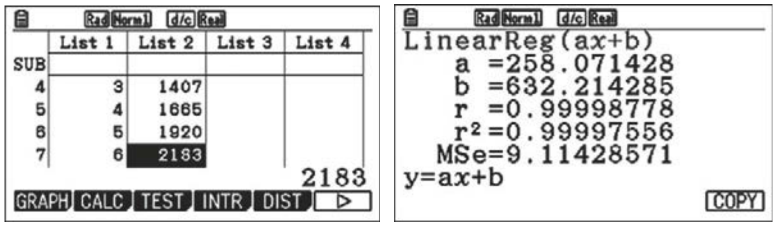






Serão necessários cerca de 24 anos para que o número de habitantes de Peso seja superior ao de Neiva.

38.3 Mais uma vez, utilizamos a calculadora gráfica, agora para determinar uma regressão linear:



Obtemos: $R(t) = 258{,}07x + 632{,}21$

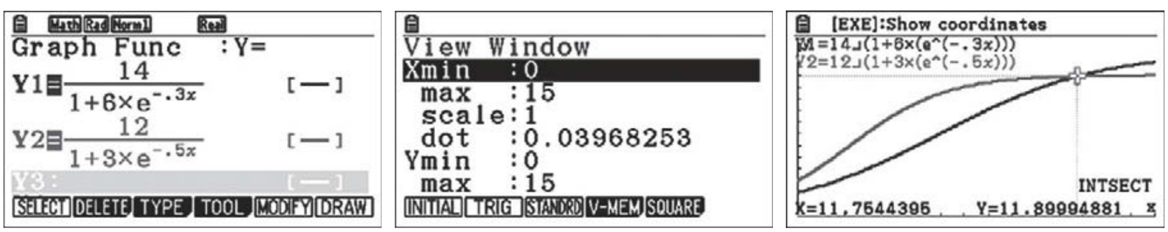
A data 1 de junho de 2012 corresponde a $t = 12$. Logo, $R(12) = 258{,}07 \times 12 + 632{,}21 = 3729{,}05$, isto é, a 1 de junho de 2012, o número de habitantes de Runa deveria ser, aproximadamente, 3729.

39.1 $f(0) = \dfrac{14}{1 + 6 \times e^{-0{,}3 \times 0}} = \dfrac{14}{7} = 2$ milhares

$g(0) = \dfrac{12}{1 + 3 \times e^{-0{,}5 \times 0}} = \dfrac{12}{4} = 3$ milhares

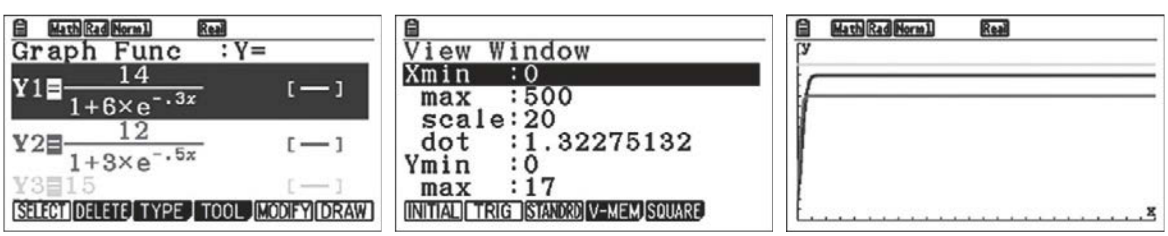
O álbum mais vendido em pré-venda foi o G.

39.2 Recorrendo à calculadora gráfica:



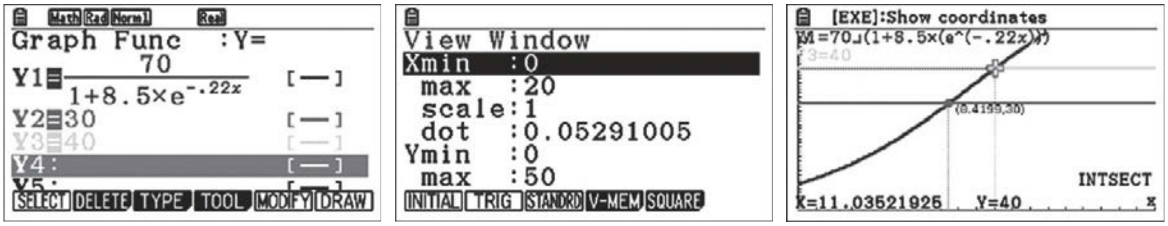
Decorreram cerca de 12 meses.

39.3 Colocando as funções no editor da calculadora e escolhendo uma janela adequada (com um valor de *t* entre 0 e 500):



Podemos concluir, com alguma segurança, que nenhum dos álbuns será galardoado com o Disco de Platina.

40.1 Vamos utilizar a calculadora para determinar a idade da Laura quando atingiu os 30 e os 40 quilogramas.



Concluímos que a Laura atingiu os 30 quilogramas aos 8,4199 anos e os 40 quilogramas aos 11,0352 anos.

Uma vez que $11{,}0352 - 8{,}4199 = 2{,}6153$ (2 anos) e $12 \times 0{,}6153 = 7{,}3836$ (7 meses), durante cerca de dois anos e sete meses, o peso da Laura situou-se entre os 30 e os 40 quilogramas.

40.2 Como nasceu a 1 de junho de 1998, no dia 1 de junho de 2012, a Laura fez 14 anos.

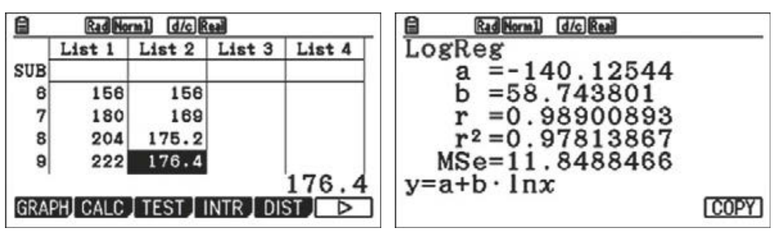
$$P(14) = \frac{70}{1 + 8{,}5 \times e^{-0{,}22 \times 14}} \approx 50{,}336$$

Consultando o gráfico, a altura da Laura deveria ser de 1,600 metros. Então:

$$\text{IMC} = \frac{50{,}336}{1{,}600^2} \approx 19{,}6625$$

No dia 1 de junho de 2012, o IMC da Laura era, aproximadamente, 19,7.

40.3 Vamos recorrer à calculadora gráfica para determinar os valores *a* e *b* da expressão $y = a + b \ln x$:



O modelo que melhor se ajusta aos valores da tabela é:

$y = -140{,}125 + 58{,}744 \ln x$

A altura do André no dia 1 de dezembro de 2014 (terá 16 anos e 6 meses, ou seja, $16 \times 12 + 6 = 198$ meses):

$y = -140{,}125 + 58{,}744 \ln(198) \approx 170{,}5 \text{ cm}$