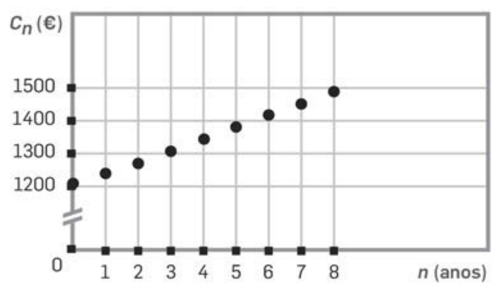
3.2 Modelos de crescimento

Atividade 1 (pág. 87)

1.1 $C_1 = 1200 + 1200 \times 0,03 = 1236$ € $C_3 = 1200 + 1200 \times 0,03 \times 3 = 1308$ €

1.2 $C_n = 1200 + 1200 \times 0,03 \times n \Leftrightarrow C_n = 1200\,(1 + 0,03n)$

1.3



$C_2 = 1272$

$C_4 = 1344$

$C_5 = 1380$

$C_6 = 1416$

$C_7 = 1452$

$C_8 = 1488$

Atividade 2 (pág. 90)

Usando a calculadora gráfica:

$y = 0,544378x + 32,425635$ (modelo linear)

Sendo $x = 83,0$, substituindo no modelo obtido:

$y = 0,544378 \times 83 + 32,425635 = 77,6090009$

Uma estimativa para a esperança média de vida à nascença de um homem austríaco será de, aproximadamente, 77,6 anos.

Atividade 3 (pág. 92)

1.ª casa: 1 grão (2^0)

$\times 2$

2.ª casa: 2 grãos (2^1)

$\times 2 \rightarrow$ razão

3.ª casa: 4 grãos (2^2)

⋮

n-ésima casa: 2^{n-1} grãos

$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$

$1 + 2 = 3$	$(2^2 - 1)$	(soma das duas primeiras casas)
$1 + 2 + 4 = 7$	$(2^3 - 1)$	(soma das três primeiras casas)
$1 + 2 + 4 + 8 = 15$	$(2^4 - 1)$	(soma das quatro primeiras casas)

⋮

Soma das 64 casas $= 2^{64} - 1$ grãos de trigo

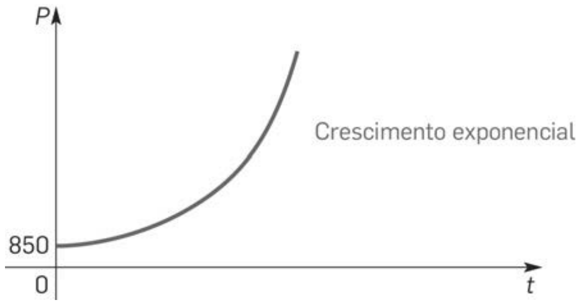
Atividade 4 (pág. 92)

4.1 $P_0 = 850 \times \left(\frac{4}{3}\right)^0 = 850$ pinheiros

4.2 $P_{10} = 850 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{10} = 15\ 094,06764$

Existirão cerca de 15 094 pinheiros.

4.3



Atividade 5 (pág. 95)

5.1 11 horas $\rightarrow t = 0$

$T(0) = 18 + 70e^{-0,05\times 0} = 88$

Às 11 horas o chá estava a 88 °C.

5.2 $7 \times 5 = 35$ minutos

O oitavo registo foi feito 35 minutos depois do primeiro.

$T(35) = 18 + 70e^{-0,05\times 35} = 18 + 70e^{-1,75}$

Variação: $T(35) - T(0) = 18 + 70e^{-1,75} - 88 \approx -57,84$

A variação da temperatura durante esses 35 minutos foi de, aproximadamente, –58 °C, o que significa que a temperatura desceu cerca de 58 °C.

Atividade 6 (pág. 97)

6.1 *Casio*: $y = 2,489 \cdot e^{-0,079\cdot x}$ $\quad C(t) = 2,489 \cdot e^{-0,079t}$

Texas: $y = 2,489 \cdot 0,924^x$ $\quad C(t) = 2,489 \cdot 0,924^t$

6.2 $6\text{ h }30' = 6,5\text{ h}$

$C(6,5) = 2,489 \times e^{-0,079\times 6,5} \approx 1,489411422$

Ou

$C(6,5) = 2,489 \times 0,924^{6,5} \approx 1,489411422$

A concentração deverá ser de, aproximadamente, 1,49 mg/cm^3.

6.3 $C(t) = 1,23\text{ mg/cm}^3$

Casio:

$$2,489 \cdot e^{-0,079t} = 1,23 \Leftrightarrow e^{-0,079t} = \frac{1,23}{2,489} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,079} \times \ln\left(\frac{1,23}{2,489}\right) \approx 8,922 \approx 8\text{ h }55'$$

Texas:

$$2,489 \cdot 0,924^t = 1,23 \Leftrightarrow 0,924^t = \frac{1,23}{2,489} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{1,23}{2,489}}{\ln 0,924} \approx 8,917 \approx 8 \text{ h } 55'$$

Atinge 1,23 mg/cm^3 após cerca de 8 horas e 55 minutos.

Atividade 7 (pág. 97)

$P(t) = 1,65 \times 2^{\frac{t}{25}}$, $\quad t \geq 0$ (t = 0 corresponde a 1900)

$2000 - 1900 = 100(t)$

$P(10) = 1,65 \times 2^{\frac{100}{25}} = 1,65 \times 2^4 = 26,4$

Teria sido, aproximadamente, 26 mil milhões de pessoas.

Nota: Progressão geométrica:

- Primeiro termo: $a_1 = 1,65$ razão: 2
- Termo geral: $a_n = 1,65 \times 2^{n-1}$
- Termo correspondente ao ano 2000: *n* = 5

$a_5 = 1,65 \times 2^{5-1} = 26,4$ mil milhões

Atividade 8 (pág. 101)

8.1 $1985 \rightarrow t = 5$

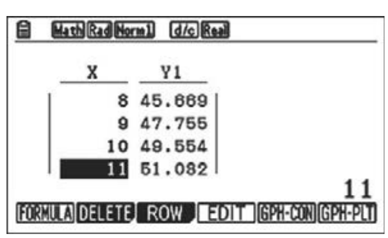
$$M(5) = \frac{58}{1 + 1,7 \cdot e^{-0,23 \times 5}} \approx 37,704$$

$4750 \times 0,38 \approx 1805$ mulheres

Em 1985, a percentagem de novos encartados do sexo feminino era cerca de 38%, o que corresponde a 1805 mulheres (do total de 4750).

8.2 Queremos saber qual o primeiro valor de *t*, para o qual $M(t) > 50$.

Podemos colocar a função $M(t)$ na calculadora gráfica (editor de funções) e consultar a tabela de valores.



Podemos observar que o primeiro ano em que a percentagem de novos encartados do sexo feminino foi superior a 50% foi em $t = 11$, isto é, em $1980 + 11 = 1991$.

Atividade 9 (pág. 103)

9.1 Durante $84:7=12$ semanas

9.2

N.º semanas (*s*)	Comprimento em cm (*C*)
0	0
1	17,93
2	36,36
3	67,76
4	98,10
5	131,00
6	169,50
7	205,50
8	228,30
9	247,10
10	250,50
11	253,80
12	254,50

9.3 $C(s)=\dfrac{259{,}9628}{1+21{,}8277\times e^{-0{,}6306s}}$

9.4 $\dfrac{100}{7}\approx 14{,}28571429$ semanas

$$C\left(\frac{100}{7}\right)\approx 259{,}27\text{ cm}$$

Atividade 10 (pág. 105)

10.1 Para determinar o valor da desvalorização pedida, teremos de calcular:

$$C_7-C_1=5{,}1-3\log_{10}7{,}1-(5{,}1-3\log_{10}1{,}1)=3\log_{10}1{,}1-3\log_{10}7{,}1\approx 2{,}43\text{ €}$$

10.2 $\dfrac{C(2)}{3}=\dfrac{5{,}1-3\log_{10}2{,}1}{3}\approx 1{,}378$

Queremos saber durante quantos dias $C(t)>1{,}378$.

Consultando a tabela de valores da função (recorrendo à calculadora), podemos concluir que a cotação foi superior a 1,378 durante os primeiros 17 dias.

Atividade 11 (pág. 107)

11.1 $N(t)=-44\ 767{,}55+5906{,}48\ln(t)$

11.2.1 $N(2021)=-44\ 767{,}55+5906{,}48\ln(2021)\approx 188{,}723$

São esperadas cerca de 189 prescrições.

11.2.2

$$N(t)=180 \Leftrightarrow -44\ 767,55+5906,48\ln(t)=180 \Leftrightarrow \ln t=\frac{180+44\ 767,55}{5906,48} \Leftrightarrow t\approx 2018,017$$

Deverá atingir as 180 prescrições em 2018.

Exercícios de aplicação (pág. 112)

1.1 $10\ 000+11\times 100=11\ 000$ pares de calças

1.2 $10\ 000+17\times 100=11\ 700$ pares de calças

2.1 50 páginas: $3+0,04\times 50=5$ €

100 páginas: $3+0,04\times 100=7$ €

2.2 $C(n)=3+0,04n$

3. Altitude do nível do mar: 0 metros

$1100-800=300$ hPa

$$\frac{1}{10}=\frac{300}{a} \Leftrightarrow a=3000$$

O alpinista encontra-se a uma altitude de 3000 metros.

4. Atividade de investigação

5. 1.º termo = 5 razão = 3

$u_n=5+3(n-1)$ $n\rightarrow$ semanas

$42=5+3n-3 \Leftrightarrow 3n=40 \Leftrightarrow n=13,(3)$

Serão necessárias entre 13 e 14 semanas.

6. $P(2031)=10\ 561\ 614\times 1,0198^2\approx 10\ 983\ 994$ habitantes

7. 100 anos = 10 décadas

$P(2101)=267\ 785\times 1,093^{10}\approx 651\ 610$ habitantes

8. $C(12)=0,5\times 3^{12}=625\ 720,5\approx 265,7$ m

9. $Valor(5)=28\ 800\times 0,85^5\approx 12\ 778,71$ €

10. 1.º termo: 1 (4^0)

2.º termo: 4 (4^1)

3.º termo: 4^2 (4^2)

$u_n=4^{n-1}$

$1+4+16+64+\ldots+4^9=349\ 525$ pessoas