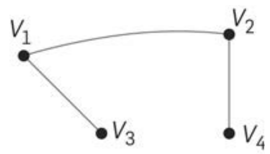
Exercícios de aplicação (pág. 76)

1.1 Sim

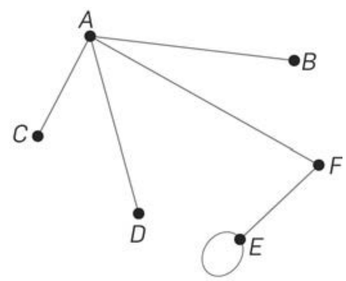
1.2 Não

1.3 Não

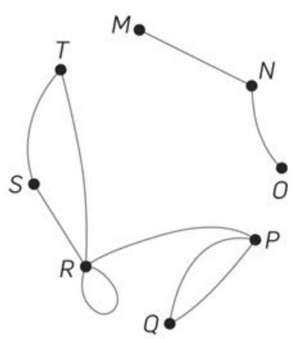
2.1



2.2



2.3



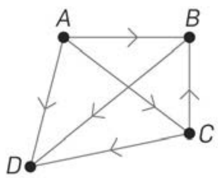
3. Os grafos dos exercícios 2.1 e 2.2 são conexos, pois existe sempre uma sequência de arestas a unir quaisquer dois vértices.

4.1 Grafo I – vértices: 3; arestas: 2
Grafo II – vértices: 4; arestas: 3
Grafo III – vértices: 4; arestas: 5
Grafo IV – vértices: 5; arestas: 9

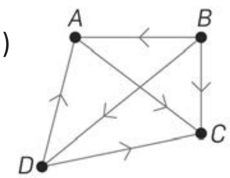
4.2 Grafo I – $V = \{V_1, V_2, V_3\}$; $A = \{V_1V_2, V_2V_2\}$
Grafo II – $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$; $A = \{V_1V_2, V_2V_3, V_3V_4\}$
Grafo III – $V = \{A, B, C, D\}$; $A = \{AC, AD, AD, BD, CD\}$
Grafo IV – $V = \{A, B, C, D, E\}$; $A = \{AB, AC, AD, AE, BD, BE, CD, CE, DE\}$

5.

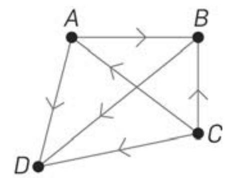
(2)



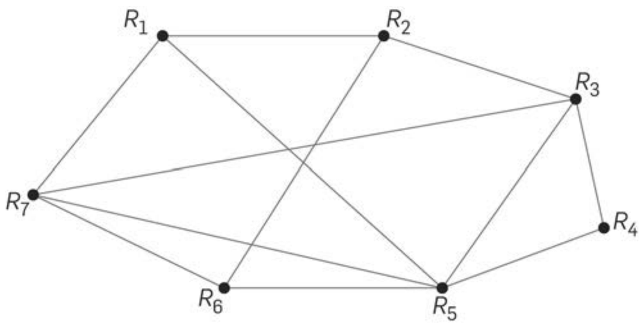
(3)



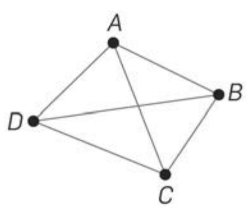
(4)



6.



7.1

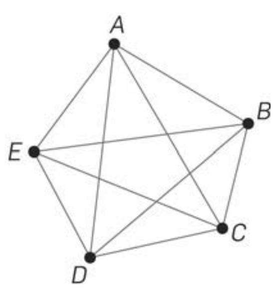


Número de vértices: 4

Número de arestas: 6

$$6 = \frac{4 \times 3}{2}$$

7.2

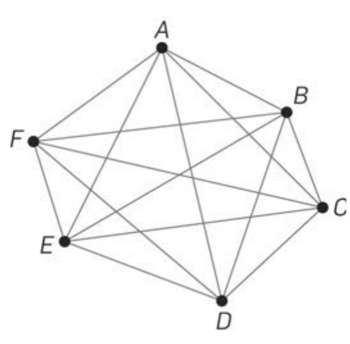


Número de vértices: 5

Número de arestas: 10

$$10 = \frac{5 \times 4}{2}$$

7.3

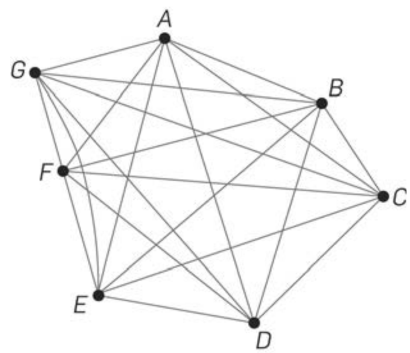


Número de vértices: 6

Número de arestas: 15

$$15 = \frac{6 \times 5}{2}$$

7.4



Número de vértices: 7

Número de arestas: 21

$$21 = \frac{7 \times 6}{2}$$

$$N_A = \frac{N_V(N_V - 1)}{2}$$

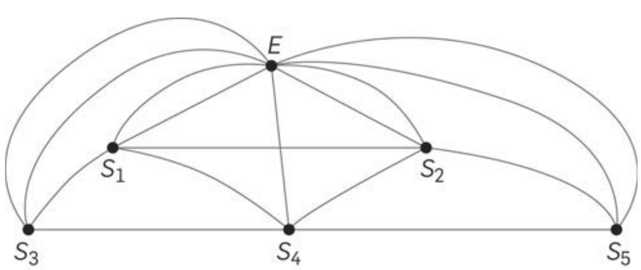
8.1 $A - 2$ $B - 3$ $C - 2$ $D - 2$ $E - 3$ $F - 1$ $G - 1$ $H - 2$
8.2 $A - 3$ $B - 3$ $C - 4$ $D - 3$ $E - 3$
8.3 $A - 2$ $B - 3$ $C - 3$ $D - 3$ $E - 3$ $F - 3$ $G - 5$
8.4 $A - 2$ $B - 3$ $C - 2$ $D - 2$ $E - 2$ $F - 1$

9.

	Soma graus (*S*)	**N.º arestas (*n*)**	***S* = 2 × *n***
Grafo 8.1	16	8	16 = 2 × 8
Grafo 8.2	16	8	16 = 2 × 8
Grafo 8.3	20	10	20 = 2 × 10
Grafo 8.4	12	6	12 = 2 × 6

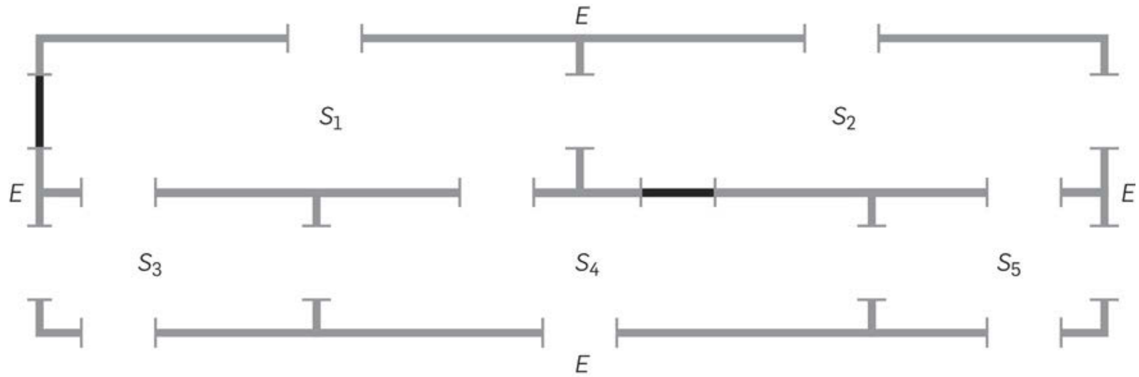
10.1 Trajeto euleriano. Não tem circuito porque tem dois vértices de grau ímpar.
10.2 Não tem trajeto euleriano, pois tem mais de dois vértices de grau ímpar.
10.3 Circuito euleriano.
10.4 Trajeto euleriano. Não tem circuito porque tem dois vértices de grau ímpar.

11.1



11.2 E – grau 9 S_1 – grau 5 S_2 – grau 5 S_3 – grau 4 S_4 – grau 5 S_5 – grau 4
11.3 Sim, é possível, fazendo, por exemplo, o percurso $E - S_1 - S_2 - S_5 - S_4 - S_3 - E$.
11.4 Não é possível, porque existem vértices de grau ímpar (salas com um número ímpar de portas).

11.5 Encerrando uma das portas de S_1 que dá acesso ao exterior e a porta de ligação entre S_2 e S_4, ficam todas as salas com um número par de portas, tornando possível as condições impostas:



12. Sim, pois todos os vértices têm grau par.

13. É possível, pois todos os vértices têm grau par.
Um percurso pode ser, por exemplo: *A X Z A M N O P Q O U R S T U V A*

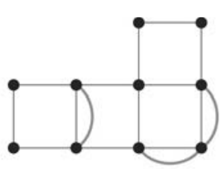
14. Pode, porque todos os vértices têm grau par.
Por exemplo: *A B D E F I J K N M L I H M O C H G D C A*

15. Se eliminarmos *FG*, os vértices *F* e *G* passam a ter grau par, como os restantes.

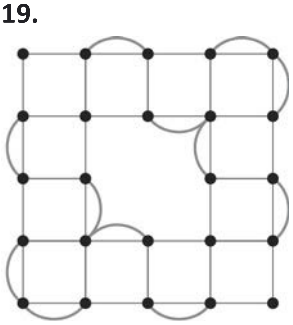
16.1 Não, porque o vértice *X* tem grau par e há dois vértices de grau ímpar.
16.2 Só consegue se repetir a aresta *BG* (fazendo com que os vértices *B* e *G* «fiquem com grau par»).
Por exemplo: *X A B C D E F B G C F G H X G B X*

17. Analisando o grau dos vértices da figura, verificamos que *E* e *F* têm grau ímpar. Para o percurso pedido satisfazer as condições impostas, todos os vértices teriam de ter grau par. Logo, o percurso que se pretende, satisfazendo cumulativamente as três condições, não é possível.

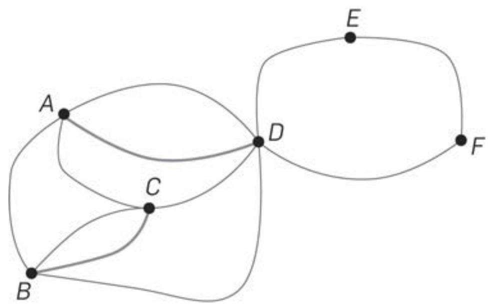
18.1 Não existe circuito euleriano porque há vértices de grau ímpar.
18.2



19.



20. Analisando os graus dos vértices do grafo da figura, verificamos que os vértices *A*, *B*, *C* e *D* têm grau ímpar, o que inviabiliza a existência de um circuito de Euler. Logo, o Carlos tem razão quando afirma que é impossível passar por todos os trajetos diretos sem repetir nenhum. Torna-se necessário eulerizar o grafo para possibilitar o percurso da organização. Assim, se duplicarmos as arestas *AD* e *BC*, por exemplo, já seria possível os participantes passarem por todos os trajetos diretos.

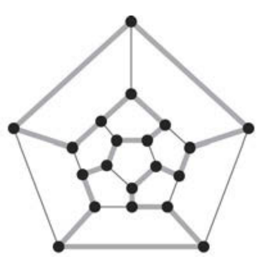


21. Repete o vértice *C*: num circuito hamiltoniano não pode haver repetição de vértices, exceto o primeiro, que também é o último.

22.1 Existe: *A E D B C A*, por exemplo.
22.2 Existe: *A C D B E F A*, por exemplo.
22.3 Existe: *J L M F G H I C D E A B J*.
22.4 Não existe.

23.1 Acrescenta-se *ED* (ou *DC*, por exemplo).
23.2 Acrescenta-se *EG* (ou *AG*, por exemplo).

24.1



24.2 Claro que sim, pois passa em cada um uma única vez.

25. Por exemplo: $B\ R_1\ R_6\ R_2\ R_3\ R_4\ R_5\ R_7\ R_8\ B$

26.
A: Circuito euleriano
B: Circuito euleriano
C: Circuito hamiltoniano
D: Circuito hamiltoniano

27. Problema do caixeiro-viajante.

28.1 Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$A \xrightarrow[5]{} B \xrightarrow[20]{} D \xrightarrow[30]{} C \xrightarrow[10]{} A$ Total: 65

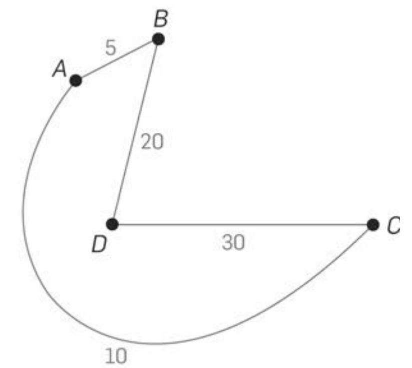
$B \xrightarrow[5]{} A \xrightarrow[10]{} D \xrightarrow[30]{} C \xrightarrow[20]{} B$ Total: 75

$C \xrightarrow[10]{} A \xrightarrow[5]{} B \xrightarrow[20]{} D \xrightarrow[30]{} C$ Total: 65

$D \xrightarrow[10]{} A \xrightarrow[5]{} B \xrightarrow[30]{} C \xrightarrow[30]{} D$ Total: 75

Percurso a começar em *A* ou *C,* com 65.

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas:



Percurso: *A B D C A*
Total: 65

28.2 Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$A \xrightarrow[52]{} D \xrightarrow[58]{} B \xrightarrow[133]{} C \xrightarrow[75]{} A$ Total: 318

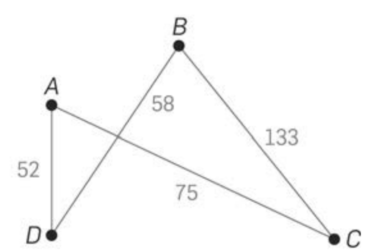
$B \xrightarrow[58]{} D \xrightarrow[52]{} A \xrightarrow[75]{} C \xrightarrow[133]{} B$ Total: 318

$C \xrightarrow[68]{} D \xrightarrow[52]{} A \xrightarrow[61]{} B \xrightarrow[133]{} C$ Total: 314

$D \xrightarrow[52]{} A \xrightarrow[61]{} B \xrightarrow[133]{} C \xrightarrow[68]{} D$ Total: 314

Percurso a começar em *C* ou *D*, com 314.

Algoritmo da ordenação dos pesos das arestas:



Percurso: *A D B C A*
Total: 318

28.3 Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$A \xrightarrow[1]{} F \xrightarrow[3]{} E \xrightarrow[5]{} D \xrightarrow[8]{} C \xrightarrow[7]{} B \xrightarrow[6]{} A$

$B \xrightarrow[6]{} A \xrightarrow[1]{} F \xrightarrow[3]{} E \xrightarrow[5]{} D \xrightarrow[8]{} C \xrightarrow[7]{} B$

$C \xrightarrow[7]{} B \xrightarrow[6]{} A \xrightarrow[1]{} F \xrightarrow[3]{} E \xrightarrow[5]{} D \xrightarrow[8]{} C$

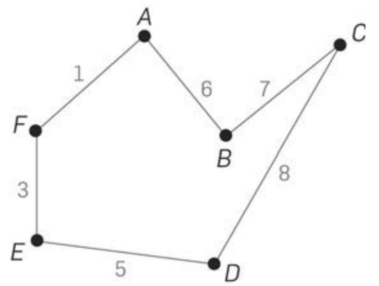
$D \xrightarrow[5]{} E \xrightarrow[3]{} F \xrightarrow[1]{} A \xrightarrow[6]{} B \xrightarrow[7]{} C \xrightarrow[8]{} D$

$E \xrightarrow[3]{} F \xrightarrow[1]{} A \xrightarrow[6]{} B \xrightarrow[7]{} C \xrightarrow[8]{} D \xrightarrow[5]{} E$

$F \xrightarrow[1]{} A \xrightarrow[6]{} B \xrightarrow[7]{} C \xrightarrow[8]{} D \xrightarrow[5]{} E \xrightarrow[3]{} F$

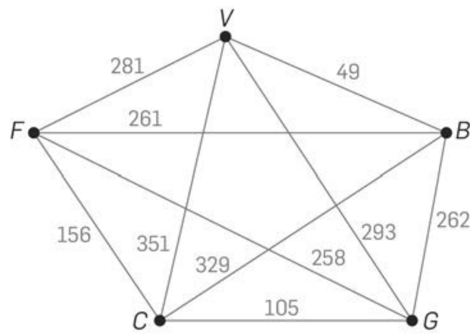
Têm todos o mesmo comprimento: 30

Algoritmo da ordenação dos pesos das arestas:



Percurso: *A F E D C B A*
Total: 30

29.1

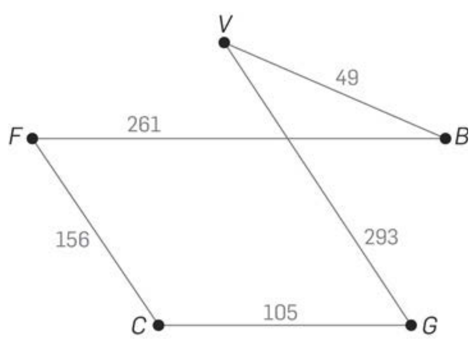


29.2 *B V F G C B*: 49 + 281 + 258 + 105 + 329 = 1022 km
B F V G C B: 261 + 281 + 293 + 105 + 329 = 1269 km

29.3 Dos dois anteriores, *B V F G C B* é o menor.

29.4 $B \xrightarrow[49]{} V \xrightarrow[281]{} F \xrightarrow[156]{} C \xrightarrow[105]{} G \xrightarrow[262]{} B$ Total: 853 km

29.5



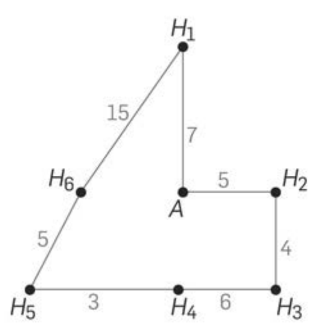
Percurso: *B F C G V B*
Comprimento: 864 km

30. Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$A \xrightarrow[5]{} H_2 \xrightarrow[4]{} H_3 \xrightarrow[6]{} H_4 \xrightarrow[3]{} H_5 \xrightarrow[5]{} H_6 \xrightarrow[15]{} H_1 \xrightarrow[7]{} A$

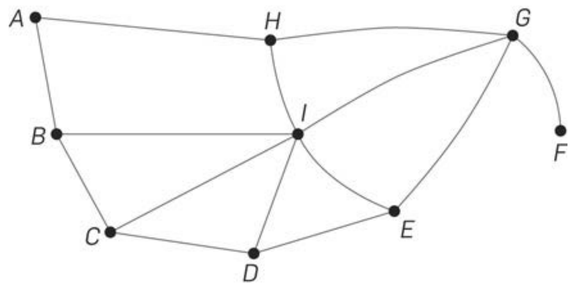
Total: 45 km

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas:

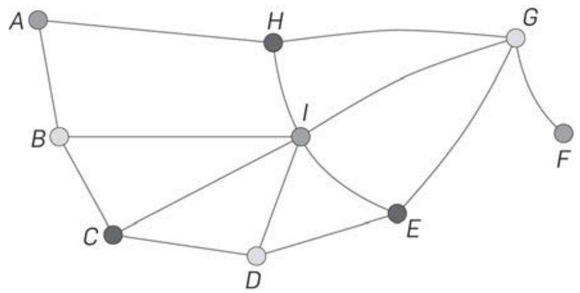


Percurso: $A\ H_1\ H_6\ H_5\ H_4\ H_3\ H_2\ A$
Total: 45 km

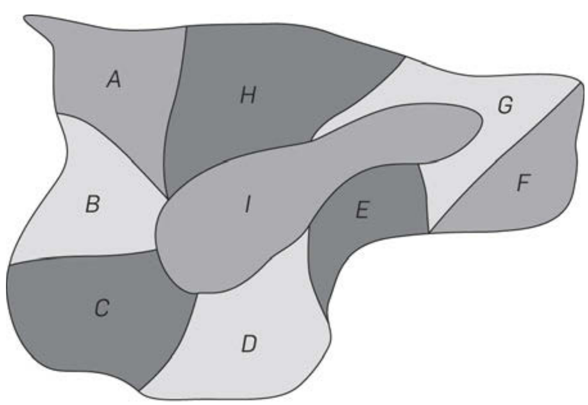
31.1 Vértices: *A*, *B*, ... , *I* – representam cada uma das províncias.
Arestas: representam a existência de fronteira entre duas províncias.



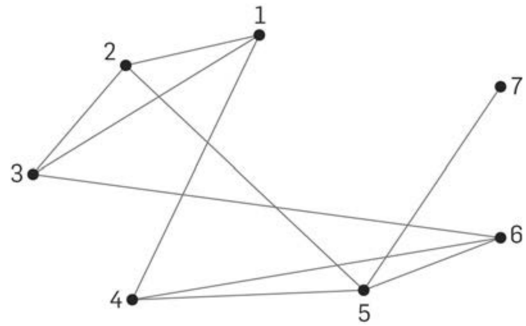
31.2



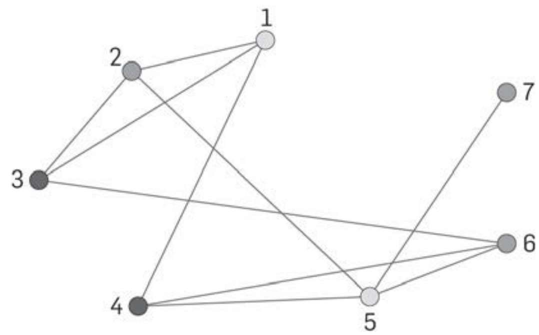
Começamos no vértice *I*, pois é o que tem maior grau, e atribuímos-lhe a primeira cor (vermelho, por exemplo), bem como aos vértices *A* e *F*, que não lhe são adjacentes. Seguimos o mesmo procedimento para os outros vértices atendendo ao grau de cada um. Serão necessárias três cores diferentes para colorir o mapa.



32.1 Os vértices representam as disciplinas e as arestas representam as incompatibilidades de realização de exame no mesmo dia.



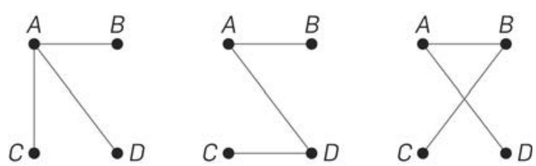
32.2 Vamos colorir os vértices do grafo, começando pelo de maior grau, colorindo com a mesma cor os vértices não adjacentes. Obteremos o seguinte grafo:



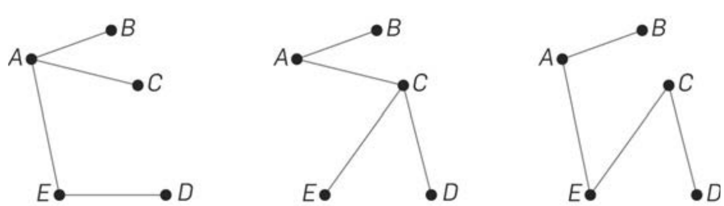
São necessários, pelo menos, três dias: um dia para os exames 1 e 5, outro para os exames 3 e 4 e um terceiro dia para os exames 2, 6 e 7.

33.1 Não é, porque tem um circuito.
33.2 É, porque é conexo e sem circuitos.
33.3 Não é, porque tem pelo menos um circuito.
33.4 É, porque é conexo e sem circuitos.

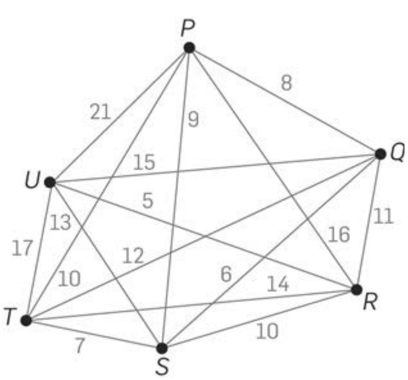
34.1 Por exemplo:



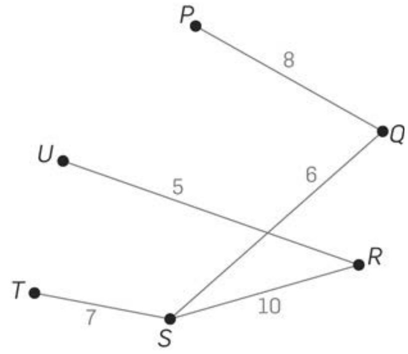
34.2 Por exemplo:



35.1



35.2 Podemos usar o algoritmo de Kruskal para obter a árvore abrangente mínima.



Comprimento: 36 dezenas de metros

35.3 Somas das distâncias a partir de:

P: $8+16+9+10+21=64$ dezenas de metros

Q: $8+11+6+12+15=52$ dezenas de metros

R: $16+11+10+14+5=56$ dezenas de metros

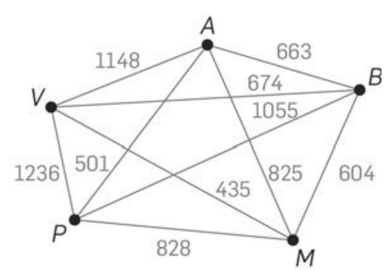
S: $9+6+10+7+13=45$ dezenas de metros

T: $10+12+14+7+17=60$ dezenas de metros

U: $21+15+5+13+17=71$ dezenas de metros

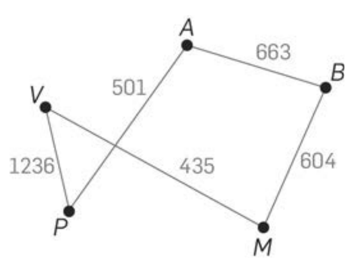
A central deve situar-se em *S*, pois é a que minimiza as distâncias a cada uma das cidades.

36. Representamos cada uma das cinco cidades pelos vértices de um grafo (vamos usar a primeira letra de cada cidade para designar cada vértice):



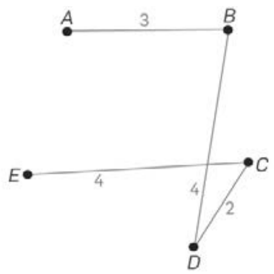
A aresta de menor peso é *VM*, com 435 quilómetros; segue-se *PA*, com 501 quilómetros, *MB* com 604 quilómetros, *AB* com 663 quilómetros e, por fim, *PV* com 1236 quilómetros (algumas arestas foram excluídas, pois fechavam o percurso antes do final):

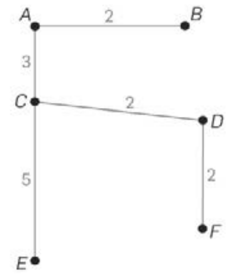
Assim, começando em Amesterdão, um percurso possível será:



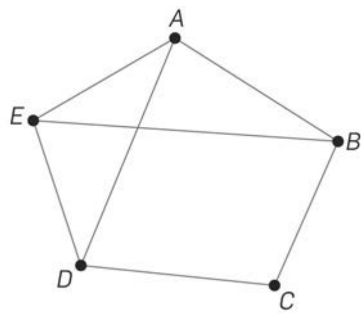
$$A \to P \to V \to M \to B \to A$$

37. As árvores finais obtidas por qualquer um dos métodos são iguais e têm o mesmo peso (I – 13 e II – 14):



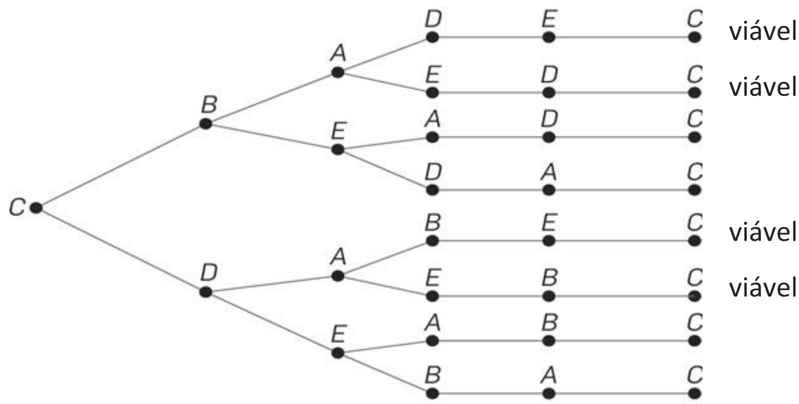


38. Representando as cidades *A*, *B*, *C*, *D* e *E* pelos vértices de um grafo, poderemos obter o seguinte modelo:



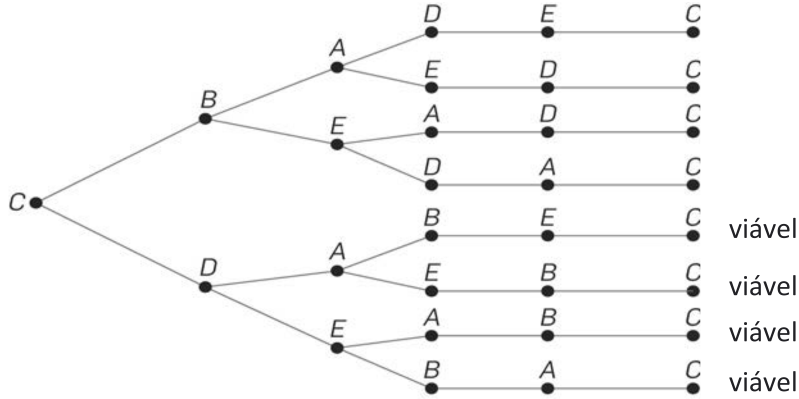
Vejamos as hipóteses possíveis para as duas alternativas e as que são viáveis.

Alternativa 1:



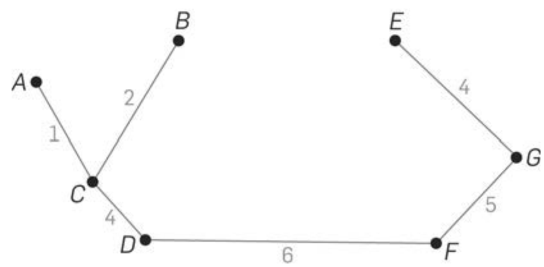
Temos quatro percursos viáveis para a alternativa 1.

Alternativa 2:



Considerando a alternativa 2, também temos quatro percursos viáveis. Logo, o Sr. Pereira não tem razão.

39. O tempo mínimo para os bombeiros será de 22 minutos e o percurso é representado pela seguinte árvore:



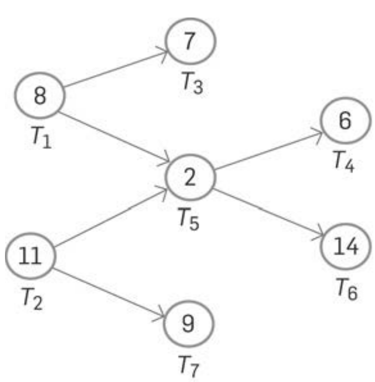
40.1

Tarefas	Tempo (H)	Precedências
T_1	6	Nenhuma
T_2	9	Nenhuma
T_3	10	Nenhuma
T_4	5	T_1
T_5	8	T_2 e T_3
T_6	12	T_3
T_7	12	T_4 e T_5
T_8	7	T_4 e T_6
T_9	6	T_6

40.2 $10 + 8 + 12 = 30$ $(T_3 \rightarrow T_5 \rightarrow T_7)$

O tempo mínimo é 30 dias.

41.1



41.2 $11 + 2 + 14 = 27$ horas $(T_2 \rightarrow T_5 \rightarrow T_6)$