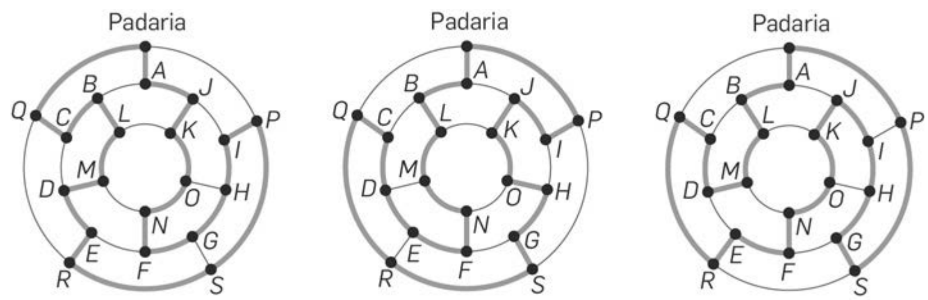
Tema 3 | Capítulo 2 – Modelos de grafos

2.1 Introdução

Atividade 1 (pág. 10)

Sugerimos que esta atividade seja desenvolvida em grupo, podendo cada um apresentar mais do que uma solução. Algumas das soluções possíveis são:



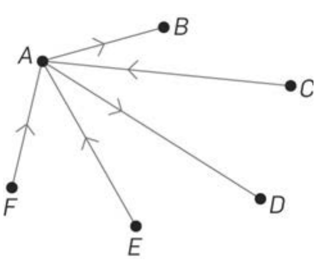
1.1 Padaria – *A J K O N F G H I P S R E D M L B C Q* – Padaria

1.2 Por exemplo:

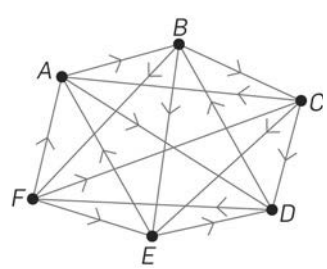
1. Padaria – *A B L M N F E D C Q R S G H O K J I P* – Padaria
2. Padaria – *P S G H I J K O N F E R Q C D M L B A* – Padaria

Atividade 2 (pág. 11)

Pretende-se que os alunos consigam interpretar a tabela e transfiram os dados para um grafo. Por exemplo, para a primeira linha da tabela, teríamos:



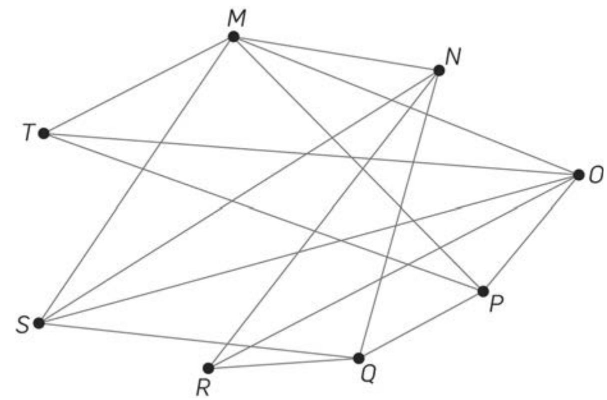
Acrescentando sucessivamente os dados da tabela, linha a linha, obtemos o grafo:



Atividade 3 (pág. 12)

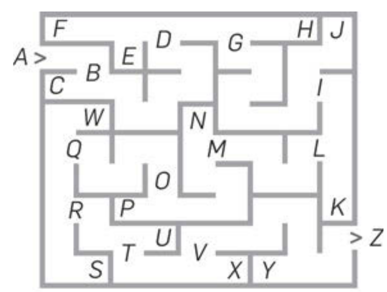
Seguindo a sugestão dada no enunciado, representamos cada uma das oito espécies de aves por um vértice, M, N, …, T, sendo as arestas as relações de incompatibilidade entre as diferentes espécies.

Obtemos o seguinte grafo:

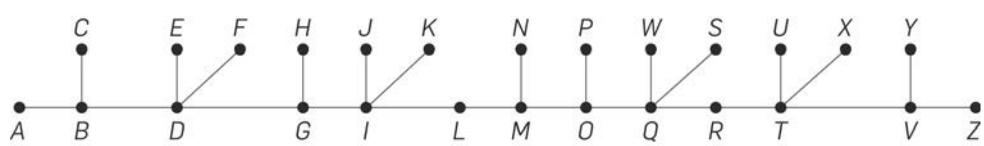


Atividade 4 (pág. 14)

A partir do labirinto da figura, podemos observar a seguinte representação, acrescentando letras (que serão os vértices do grafo) na entrada, na saída, nos cruzamentos e nos «becos sem saída».



Um grafo representativo deste esquema pode ser:

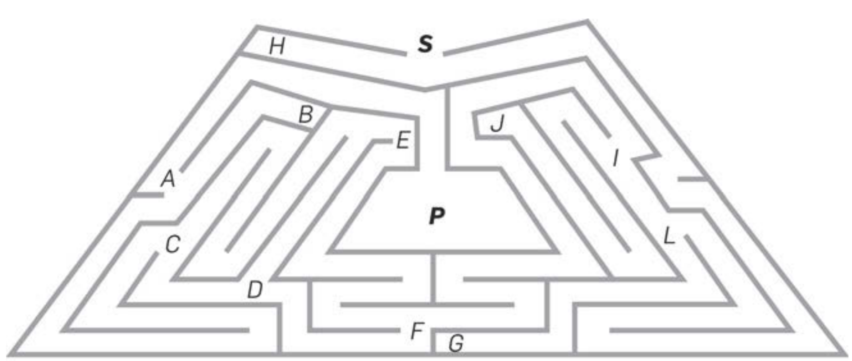


Sequência pedida:

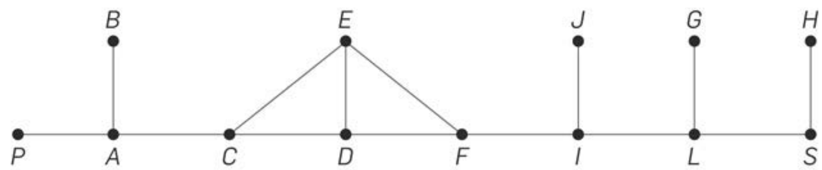
A – B – D – G – I – L – M – O – Q – R – T – V – Z

Atividade 5 (pág. 14)

Seguindo o mesmo raciocínio da atividade anterior:



Um grafo representativo da situação seria:



Uma sequência para chegar à saída do labirinto será: *P – A – C – D – F – I – L – S*

2.2 Trajetos e circuitos eulerianos

Atividade 1 (pág. 16)

1.1 Grafo I: *A*: 3 *B*: 1 *C*: 2 *D*: 4

Grafo II: *A*: 2 *B*: 4 *C*: 4 *D*: 2 *E*: 3 *F*: 3

Grafo III: *A*: 1 *B*: 1 *C*: 2 *D*: 2 *E*: 4 *F*: 2 *G*: 2 *H*: 2

Grafo IV: *A*: 3 *B*: 3 *C*: 3 *D*: 3 *E*: 3 *F*: 3 *G*: 3 *H*: 3 *I*: 3 *J*: 3

1.2 O grafo IV, porque qualquer um dos seus vértices tem o mesmo grau (3).

1.3 I – Número de arestas: 5

Soma dos graus de todos os vértices: 10

$10 = 2 \times 5 \Leftrightarrow 10 = 10$ Proposição verdadeira

II – Número de arestas: 9

Soma dos graus de todos os vértices: 18

$18 = 2 \times 9 \Leftrightarrow 18 = 18$ Proposição verdadeira

III – Número de arestas: 8

Soma dos graus de todos os vértices: 16

$16 = 2 \times 8 \Leftrightarrow 16 = 16$ Proposição verdadeira

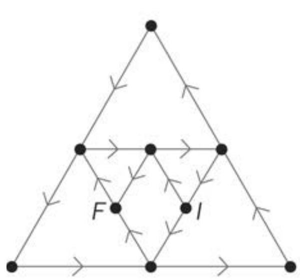
IV – Número de arestas: 15

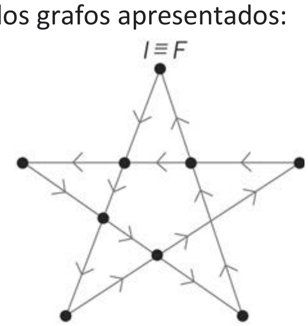
Soma dos graus de todos os vértices: 30

$30 = 2 \times 15 \Leftrightarrow 30 = 30$ Proposição verdadeira

Atividade 2 (pág. 18)

Apresentamos, em seguida, uma solução para cada um dos grafos apresentados:





I – Início do percurso *F* – Fim do percurso

Atividade 3 (pág. 19)

I – O grafo tem quatro vértices de grau ímpar, logo, não tem trajeto nem circuito euleriano.

II – O grafo tem apenas dois vértices de grau ímpar (os restantes têm grau par), logo, tem um trajeto euleriano, mas não tem circuito euleriano.

III – O grafo tem os vértices todos de grau ímpar, logo, não tem nem trajeto nem circuito euleriano.

IV – O grafo tem os vértices todos de grau ímpar, logo, não tem nem trajeto nem circuito euleriano.

V – O grafo tem os vértices todos de grau par, pelo que tem trajeto e circuito euleriano.

VI – O grafo tem os vértices todos de grau par, pelo que tem trajeto e circuito euleriano.

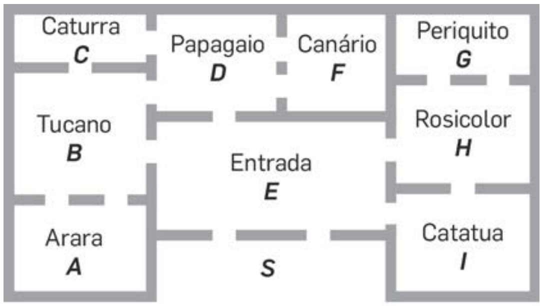
VII – O grafo tem apenas dois vértices de grau ímpar (os restantes têm grau par), logo, tem trajeto euleriano, mas não tem circuito euleriano.

VIII – O grafo tem apenas dois vértices de grau ímpar (os restantes têm grau par), logo, tem trajeto euleriano, mas não tem circuito euleriano.

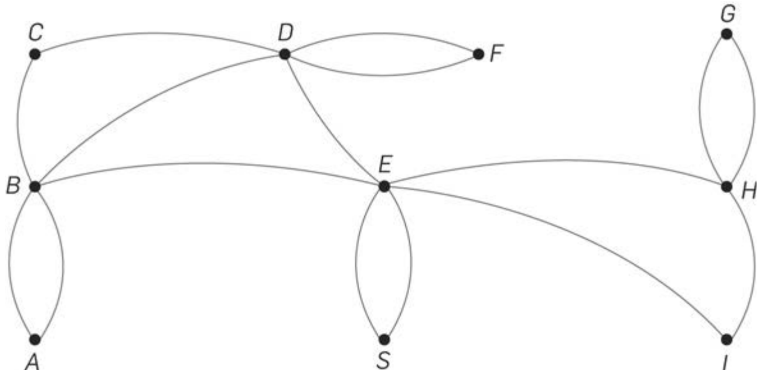
IX – O grafo tem os vértices todos de grau par, pelo que tem trajeto e circuito euleriano.

Atividade 4 (pág. 20)

Para facilitar a tarefa, vamos representar por uma letra, de A a I, cada uma das salas do clube, e por S a saída:



No grafo, cada sala será representada por um vértice e as arestas serão as portas de ligação entre as diferentes salas:



É possível planear o percurso sem repetir portas (apenas temos dois vértices com grau ímpar, *B* e *D*), mas teremos de repetir três salas com aves. Por exemplo, o percurso *S – E – I – H – G – H – E – D – F – D – C – B – A – B – E – S* repete as salas onde estão os rosicolores, os papagaios e os tucanos.

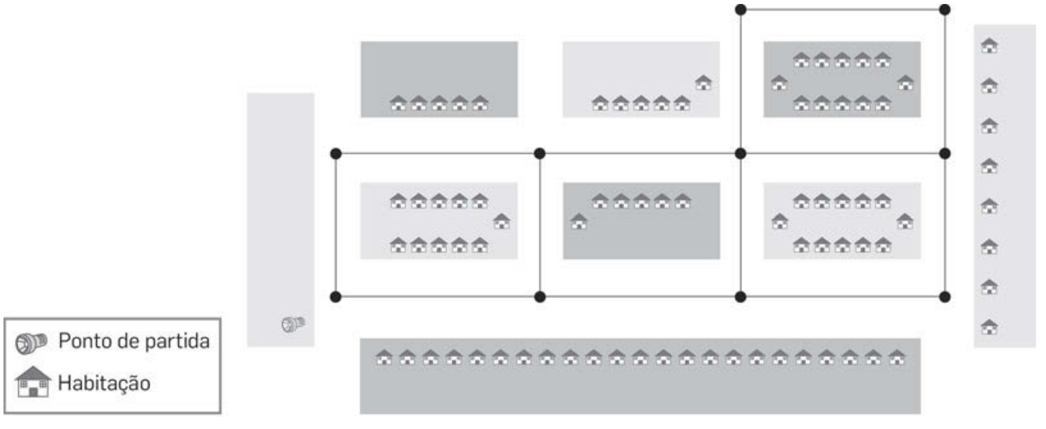
Atividade 5 (pág. 21)

Observemos o esquema do pavilhão:

O auditório e o *cyber-room* têm um número ímpar de portas, o que torna impossível o Jacinto ter passado por todas elas e acabar do lado de fora do pavilhão. Logo, é o Jacinto quem está a mentir.

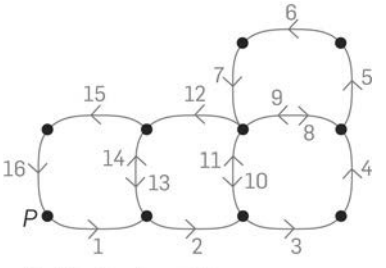
Atividade 6 (pág. 24)

O guarda-noturno não consegue fazer a ronda passando uma só vez em cada rua. Se considerarmos que cada cruzamento é representado por um vértice, sendo as ruas as arestas, obtemos o seguinte grafo:



Observamos que existem vários vértices de grau ímpar (são quatro), o que torna impossível a pretensão do guarda-noturno.

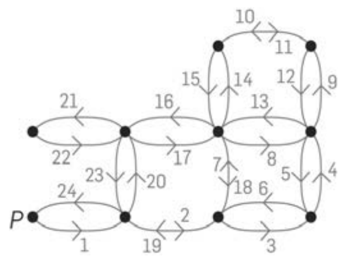
O trajeto que repete o menor número de ruas é:



P – Ponto de partida

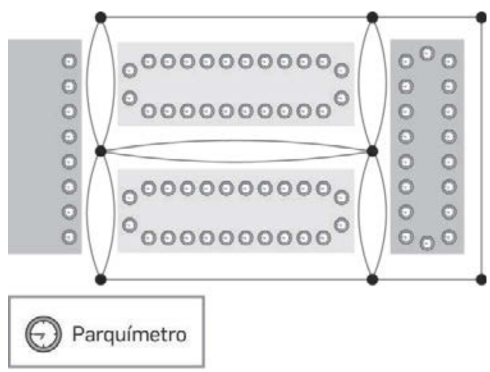
Atividade 7 (pág. 24)

Desta vez, o guarda-noturno deverá percorrer cada rua que tenha casas dos dois lados duas vezes. Uma das soluções possíveis é:

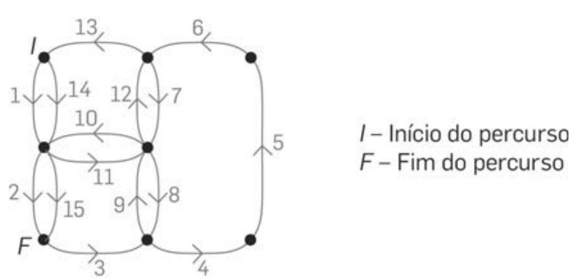


Atividade 8 (pág. 25)

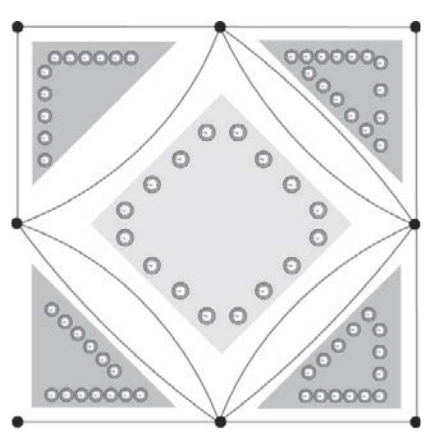
Zona urbana 1 – Com base no esquema da área a controlar, podemos obter o seguinte grafo:



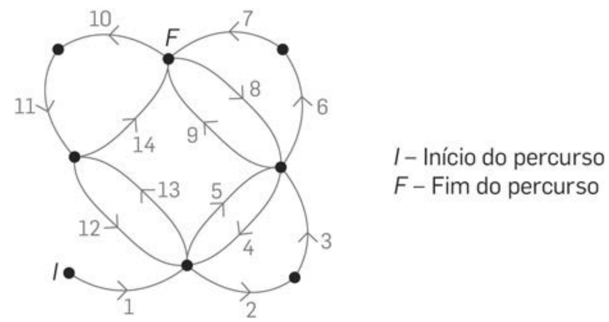
Como cada rua com parquímetros dos dois lados deve ser percorrida duas vezes, obtemos como solução possível o seguinte grafo:



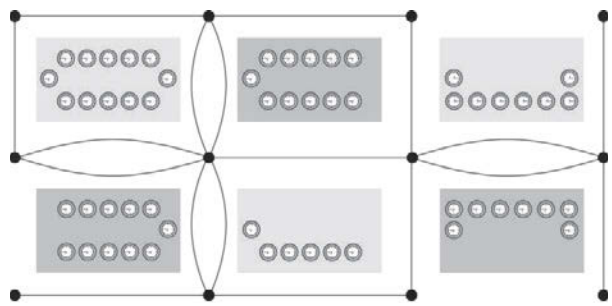
Zona urbana 2 – De forma análoga à anterior, podemos obter o grafo:



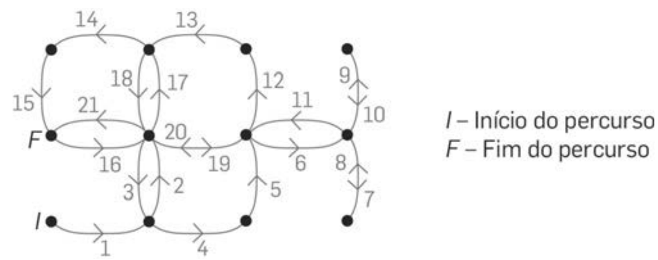
Um dos possíveis percursos do controlador é dado por:



Zona urbana 3 – O grafo a percorrer será:



Um percurso possível é:

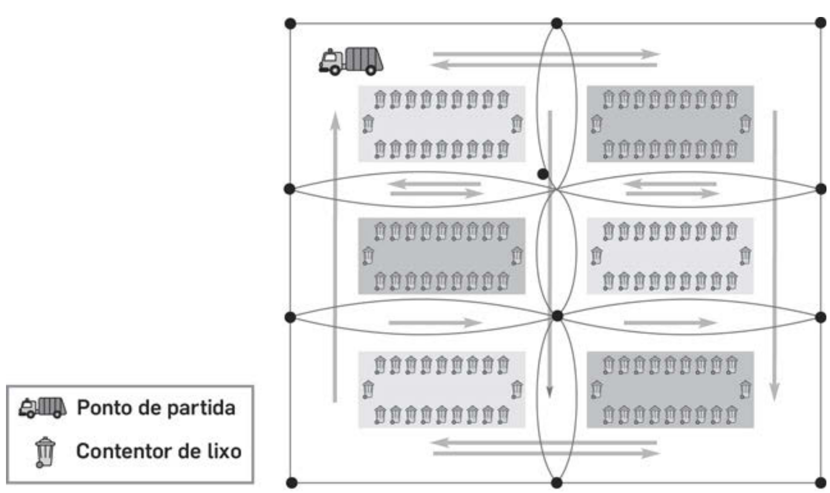


Atividade 9 (pág. 26)

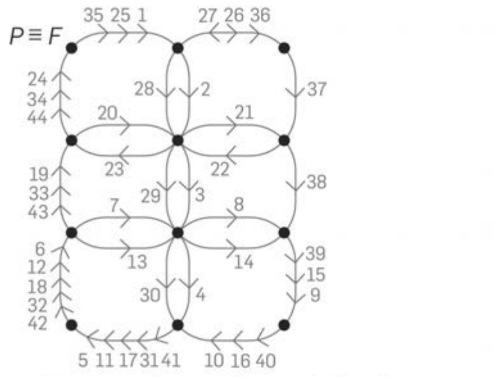
Trabalho de pesquisa

Atividade 10 (pág. 26)

O grafo que se pode obter não é difícil:



O que contribui para «complicar» são os sentidos impostos.
O trajeto mais simples que conseguimos foi:



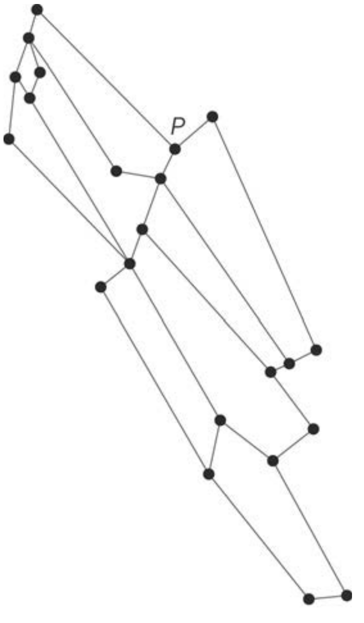
P – Ponto de partida   *F* – Fim do percurso

Será possível melhorar este percurso?

Atividade 11 (pág. 27)

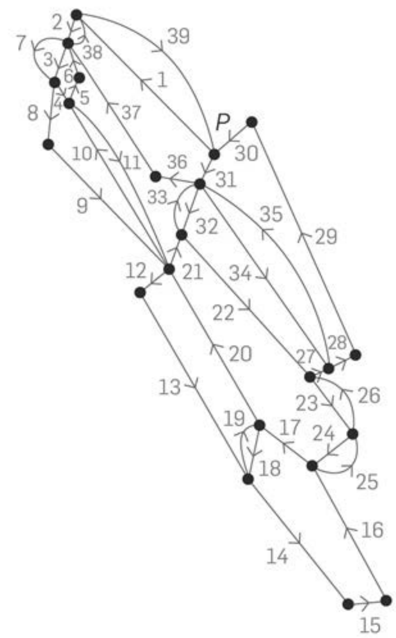
11.1 Recorrendo à imagem, vamos assinalar os cruzamentos com pontos, que serão os vértices:

Acrescentando as arestas, que correspondem às ruas assinaladas entre os diferentes vértices, obtemos:



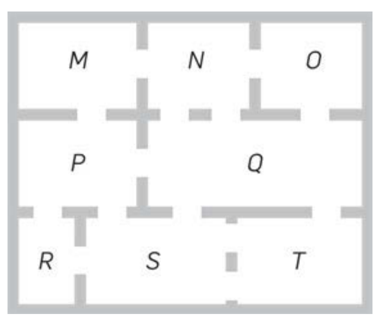
11.2 Não é possível, pois existem vértices de grau ímpar, logo, não conseguimos encontrar um circuito de Euler. Eulerizando o grafo, é possível encontrar um percurso para a Margarida que repita o menor número de ruas. Por exemplo:

A Margarida, neste percurso, terá de repetir nove ruas (foram acrescentadas nove arestas).



Atividade 12 (pág. 30)

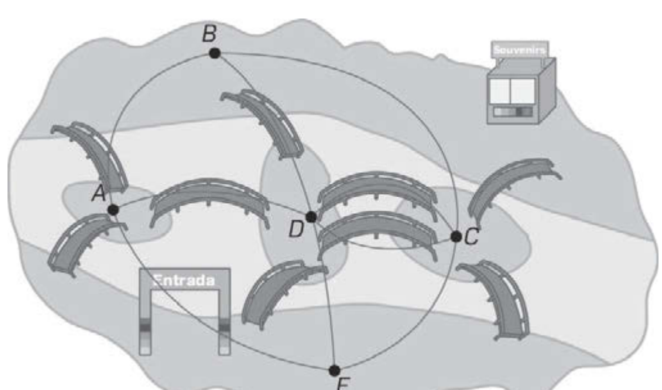
Observemos o esquema da mansão:



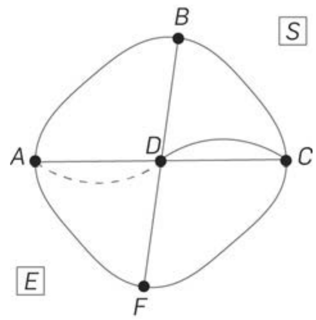
Facilmente se verifica que os quartos *S* e *T* têm um número ímpar de portas; logo, a Eugénia não consegue percorrer todos os quartos da mansão passando uma só vez por cada porta e regressar ao quarto inicial. Basta, no entanto, abrir mais uma porta de *S* para *T* (ou fechar), para assim conseguir o que pretendia.

Atividade 13 (pág. 30)

Vamos representar o problema por um grafo:

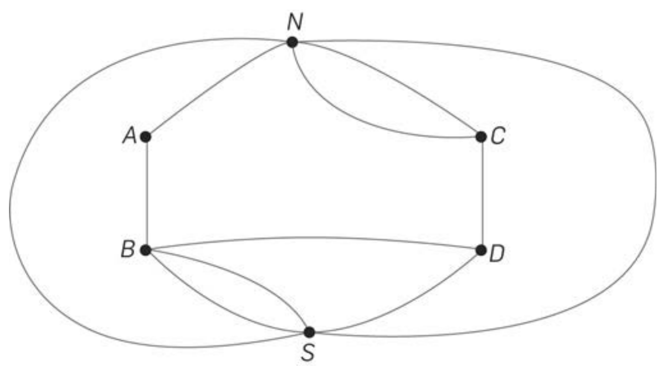


Não é possível percorrer todo o jardim começando na entrada, passando uma única vez por cada porta e terminando na loja de *souvenirs* porque, além dos vértices F (início) e B (fim), existem mais vértices de grau ímpar.
Assim, B e F podem ter grau ímpar, mas devem ser os únicos. Construir mais uma ponte entre A e D, resolveria o problema:



Atividade 14 (pág. 31)

14.1 Se designarmos as margens por N e S e as «pequenas ilhas» por A, B, C e D, estes pontos representarão os vértices do grafo, enquanto as pontes serão as arestas:



14.2.1 O grafo tem quatro vértices de grau ímpar, os vértices S, N, C e D, logo, o fotógrafo terá de repetir algumas travessias. Por exemplo, se começar em S e tiver de terminar neste mesmo ponto, basta repetir a aresta CD e a aresta NS, ficando com todos os vértices com grau par. Assim, o fotógrafo, além de atravessar uma vez cada uma das 11 pontes, terá de atravessar duas vezes as pontes Jefferson e Kennedy, pelo que terá de pagar:

$$11 \times 4 + 2 \times 4 = 52 \text{ €}$$

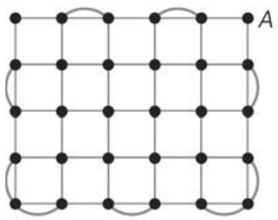
14.2.2 Se o fotógrafo puder começar em S e terminar em N, por exemplo, apenas terá de repetir uma ponte, a ponte Kennedy, pelo que terá de pagar:

$$11 \times 4 + 1 \times 4 = 48 \text{ €}$$

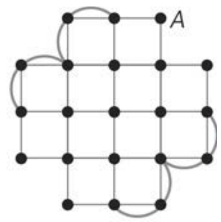
Atividade 15 (pág. 33)

Seguindo a técnica descrita no Manual para a eulerização de redes viárias retangulares, é fácil obter um circuito euleriano neste tipo de grafos.

15.1

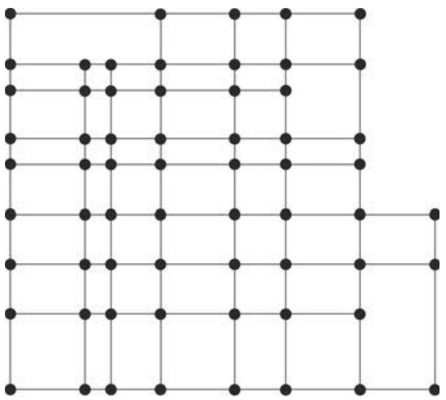


15.2



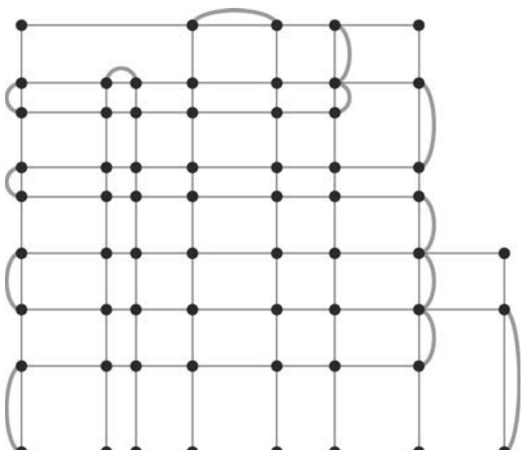
Atividade 16 (pág. 33)

16.1 No grafo, os vértices representam os cruzamentos e as arestas representam as ruas.



16.2 Basta eulerizar o grafo.

Seguindo a técnica de eulerização de redes viárias retangulares, podemos obter, por exemplo:



Como todos os vértices têm agora grau par, é possível encontrar um circuito euleriano para o camião 102.

2.3 Circuitos hamiltonianos

Atividade 1 (pág. 37)

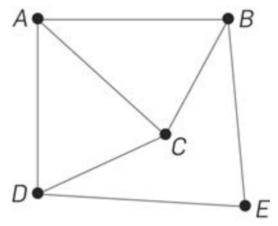
Grafo I – *A F C D E B A*, por exemplo
Grafo II – *A C B D A*, por exemplo
Grafo III – *E C D F B A E*, por exemplo
Grafo IV – *A E F B C H G D A*, por exemplo
Grafo V – Não é possível
Grafo VI – Não é possível

Atividade 2 (pág. 38)

Esta atividade poderá ser adaptada à região onde os alunos habitam e proporcionar um estudo mais detalhado da geografia da região. Porque não fazer uma rota dos castelos ou de ruínas romanas?

Atividade 3 (pág. 39)

Considerando o grafo inicial:



É fácil encontrar um circuito hamiltoniano: *A C D E B A*, por exemplo. No entanto, se retirarmos a aresta *AC* (por causa da rotura do cano da água), já não é possível encontrar um circuito hamiltoniano.

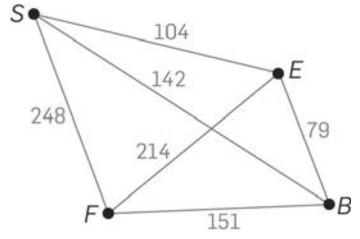
Atividade 4 (pág. 39)

4.1 Não é possível, pois para regressar à Gare do Oriente terá de repetir estações (Olaias, Bela Vista, Chelas, Olivais e Cabo Ruivo).

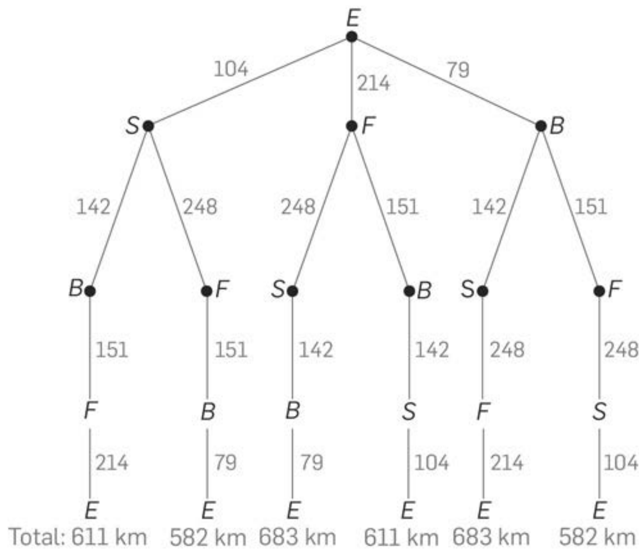
4.2 Sim, é possível. Por exemplo: Alameda, Campo Grande, Marquês, Baixa-Chiado e, novamente, Alameda.

Atividade 5 (pág. 44)

5.1 Com a ajuda de um mapa, obtemos o seguinte grafo ponderado, em que os pesos são as distâncias em quilómetros



5.2 A árvore que se obtém, saindo de Évora, é:



O menor percurso, com 582 quilómetros, é:

Évora $\longrightarrow$ Setúbal $\longrightarrow$ Faro $\longrightarrow$ Beja $\longrightarrow$ Évora

(ou no sentido inverso)

5.3 Para saber o percurso óptimo, temos de determinar todos os percursos possíveis: uma árvore para cada cidade de onde se parte. Com alguma paciência, podemos concluir que o amigo poderia ter saído de qualquer uma das quatro cidades, desde que tivesse feito um percurso determinado:

- Saindo de Setúbal:

$S \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow S$ 582 km

- Saindo de Beja:

$B \longrightarrow E \longrightarrow S \longrightarrow F \longrightarrow B$ 582 km

- Saindo de Faro:

$F \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow F$ 582 km

(ou os percursos inversos)

Esta atividade poderá ser adaptada à região em que os alunos habitam, com outras cidades, ou dentro da mesma cidade, com pontos de interesse a ver durante uma visita.
O professor pode aumentar para cinco o número de cidades, de modo que os alunos verifiquem que o acréscimo de uma cidade aumenta de 6 para 24 o número de percursos.

Atividade 6 (pág. 48)

Utilizando o algoritmo do vizinho mais próximo, obtemos cinco percursos, cada um correspondente a cada um dos pontos de partida:

$A \xrightarrow[30]{} B \xrightarrow[55]{} D \xrightarrow[40]{} E \xrightarrow[85]{} C \xrightarrow[45]{} A$ Total: 255 km

$B \xrightarrow[30]{} A \xrightarrow[45]{} C \xrightarrow[50]{} D \xrightarrow[40]{} E \xrightarrow[65]{} B$ Total: 230 km

$C \xrightarrow[45]{} A \xrightarrow[30]{} B \xrightarrow[55]{} D \xrightarrow[40]{} E \xrightarrow[85]{} C$ Total: 255 km

$D \xrightarrow[40]{} E \xrightarrow[65]{} B \xrightarrow[30]{} A \xrightarrow[45]{} C \xrightarrow[50]{} D$ Total: 230 km

$E \xrightarrow[40]{} D \xrightarrow[50]{} C \xrightarrow[45]{} A \xrightarrow[30]{} B \xrightarrow[65]{} E$ Total: 230 km

Os percursos *B A C D E B*, *D E B A C D* ou *E D C A B E,* com um comprimento igual a 230 quilómetros, são percursos mínimos. Obtém-se um comprimento mínimo com este algoritmo, igual ao já obtido pelo algoritmo por ordenação dos pesos das arestas.

Atividade 7 (pág. 49)

7.1

	C. Branco
C. Branco	
Belmonte	71
Covilhã	59
Fundão	44
Penamacor	51
Idanha	35
V. V. Rodão	32
Vila de Rei	87
Sertã	68
Oleiros	63
Proença	51

7.2 Por uma questão de comodidade, vamos usar apenas as iniciais de cada cidade.

Pelo algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$CB \xrightarrow[35]{} I \xrightarrow[37]{} P \xrightarrow[109]{} O \xrightarrow[27]{} S \xrightarrow[21]{} VR \xrightarrow[87]{} CB$$

Distância total: 316 quilómetros

Pelo algoritmo por ordenação dos pesos das arestas:

$S \underset{21}{\overline{\qquad}} VR$; $S \underset{27}{\overline{\qquad}} O$; $CB \underset{35}{\overline{\qquad}} I$; $I \underset{37}{\overline{\qquad}} P$; $O \underset{46}{\overline{\qquad}} VR$; $CB \underset{51}{\overline{\qquad}} P$;

$CB \underset{63}{\overline{\qquad}} O$; $CB \underset{68}{\overline{\qquad}} S$; $CB \underset{87}{\overline{\qquad}} VR$; $O \underset{93}{\overline{\qquad}} I$; $S \underset{102}{\overline{\qquad}} I$; $O \underset{109}{\overline{\qquad}} P$;

$S \underset{118}{\overline{\qquad}} P$; $VR \underset{121}{\overline{\qquad}} I$; $VR \underset{137}{\overline{\qquad}} P$

Percurso: $CB \xrightarrow[35]{} I \xrightarrow[37]{} P \xrightarrow[137]{} VR \xrightarrow[21]{} S \xrightarrow[27]{} O \xrightarrow[63]{} CB$ (ou sentido inverso)

Distância total: 320 quilómetros

Obtivemos um percurso menor (menos 4 quilómetros) pelo algoritmo dos mínimos sucessivos.

7.3 Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$CB \xrightarrow[32]{} VVR \xrightarrow[39]{} F \xrightarrow[23]{} C \xrightarrow[23]{} B \xrightarrow[117]{} PN \xrightarrow[42]{} O \xrightarrow[63]{} \text{CB}$$

Distância total: 369 quilómetros

Atividade 8 (pág. 50)

Para concluirmos acerca do percurso óptimo, temos de analisar os 60 percursos.

Os alunos devem ser confrontados com esta situação, de modo a sentirem necessidade de encontrar um processo menos moroso para chegar a uma boa solução. Utilizando os dois algoritmos, podemos obter uma dessas soluções. Podendo não ser a solução ótima, é uma boa solução.

Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$L \xrightarrow[150]{} E \xrightarrow[78]{} B \xrightarrow[333]{} C \xrightarrow[60]{} A \xrightarrow[252]{} L \quad \text{Total: 873 km}$$

$$E \xrightarrow[78]{} B \xrightarrow[186]{} L \xrightarrow[201]{} C \xrightarrow[60]{} A \xrightarrow[306]{} E \quad \text{Total: 831 km}$$

$$B \xrightarrow[78]{} E \xrightarrow[150]{} L \xrightarrow[201]{} C \xrightarrow[60]{} A \xrightarrow[371]{} B \quad \text{Total: 860 km}$$

$$C \xrightarrow[60]{} A \xrightarrow[252]{} L \xrightarrow[150]{} E \xrightarrow[78]{} B \xrightarrow[333]{} C \quad \text{Total: 873 km}$$

$$A \xrightarrow[60]{} C \xrightarrow[201]{} L \xrightarrow[150]{} E \xrightarrow[78]{} B \xrightarrow[371]{} A \quad \text{Total: 860 km}$$

O melhor percurso, usando este algoritmo, é *E B L C A E*, com um total de 831 quilómetros.

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas:
Usando este algoritmo, o circuito é *A C L E B A*, com uma distância total igual a 860 quilómetros.

Conclusão: Obtemos um percurso melhor usando o algoritmo dos mínimos sucessivos do que usando o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas. O armazém de distribuição deve ficar em Évora.

Atividade 9 (pág. 50)

Nesta atividade, vamos novamente aplicar os dois algoritmos para poder tirar conclusões.

Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$A \xrightarrow[7]{} B \xrightarrow[5]{} F \xrightarrow[3]{} C \xrightarrow[5]{} D \xrightarrow[3]{} E \xrightarrow[12]{} A \quad \text{Total: 35 dezenas de metros}$$

$$B \xrightarrow[5]{} F \xrightarrow[3]{} C \xrightarrow[5]{} D \xrightarrow[3]{} E \xrightarrow[12]{} A \xrightarrow[7]{} B \quad \text{Total: 35 dezenas de metros}$$

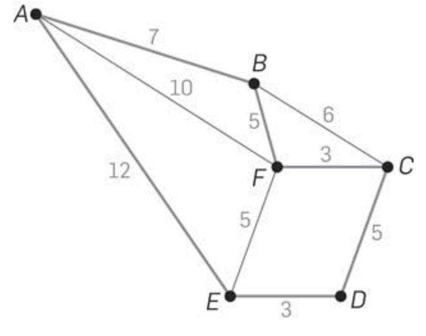
$$C \xrightarrow[3]{} F \xrightarrow[5]{} B \xrightarrow[7]{} A \xrightarrow[12]{} E \xrightarrow[3]{} D \xrightarrow[5]{} C \quad \text{Total: 35 dezenas de metros}$$

$$D \xrightarrow[3]{} E \xrightarrow[5]{} F \xrightarrow[10]{} A \xrightarrow[7]{} B \xrightarrow[6]{} C \xrightarrow[5]{} D \quad \text{Total: 36 dezenas de metros}$$

$$E \xrightarrow[3]{} D \xrightarrow[5]{} C \xrightarrow[3]{} F \xrightarrow[5]{} B \xrightarrow[7]{} A \xrightarrow[12]{} E \quad \text{Total: 35 dezenas de metros}$$

$$F \xrightarrow[3]{} C \xrightarrow[5]{} D \xrightarrow[3]{} E \xrightarrow[12]{} A \xrightarrow[7]{} B \xrightarrow[5]{} F \quad \text{Total: 35 dezenas de metros}$$

Pelo algoritmo das arestas classificadas, obtém-se também um circuito de comprimento igual a 35 dezenas de metros:



Conclusão: O agente poderá deixar o automóvel junto a qualquer prédio, exceto junto ao *D*, e vai percorrer uma distância igual a 35 dezenas de metros.

Atividade 10 (pág. 50)

Pelo algoritmo dos mínimos sucessivos, saindo do aeroporto (*A*), obtém-se o percurso:

$A \xrightarrow[5]{} PD \xrightarrow[9]{} L \xrightarrow[7]{} LF \xrightarrow[13]{} RG \xrightarrow[28]{} F \xrightarrow[8]{} P \xrightarrow[22]{} VF \xrightarrow[48]{} SC \xrightarrow[130]{} N \xrightarrow[63]{} A$ Total: 333 km

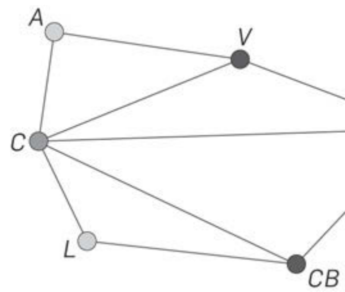
Pelo algoritmo por ordenação dos pesos das arestas, obtém-se o percurso:

$A \xrightarrow[5]{} PD \xrightarrow[9]{} L \xrightarrow[7]{} LF \xrightarrow[13]{} RG \xrightarrow[36]{} VF \xrightarrow[19]{} F \xrightarrow[8]{} P \xrightarrow[28]{} N \xrightarrow[130]{} SC \xrightarrow[18]{} A$ Total: 273 km

No Manual encontrámos um percurso menor do que qualquer um destes, o que vem reforçar a ideia de que apenas o método exaustivo nos garante uma solução ótima.

Atividade 11 (pág. 55)

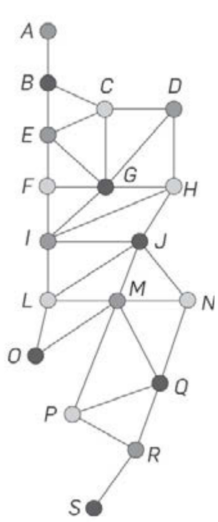
Os vértices do grafo representam os distritos da região centro: Aveiro (*A*), Coimbra (*C*), Castelo Branco (*CB*), Guarda (*G*), Leiria (*L*) e Viseu (*V*). As arestas representam os distritos adjacentes:



Começando pelo vértice de maior grau, *C*, atribuímos-lhe uma primeira cor (por exemplo, vermelho). Como é adjacente a todos os outros, passamos ao vértice com maior grau seguinte: pode ser *G, CB* ou *V*. Vamos optar por *G*. Atribuímos-lhe uma segunda cor (por exemplo, verde) e a mesma a *A* e a *L*, que não lhe são adjacentes. Finalmente, atribuímos uma terceira cor (por exemplo, azul) aos vértices *V* e *CB,* que não são adjacentes.
O número cromático da região centro é três.

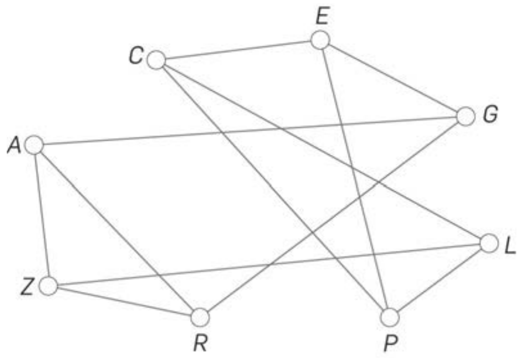
Atividade 12 (pág. 55)

O número cromático de Portugal continental é três.

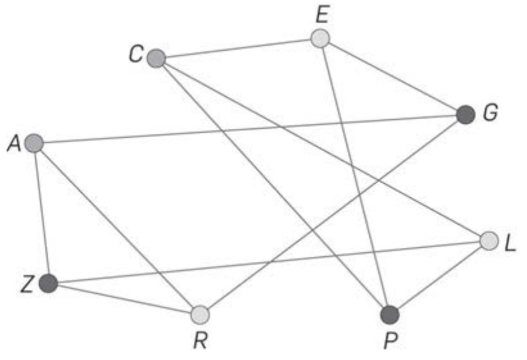


Atividade 13 (pág. 58)

13.1 Os vértices representam cada uma das espécies (utilizámos apenas a primeira letra de cada uma) e as arestas representam as relações de incompatibilidade entre as diferentes espécies. O grafo que modela esta situação pode ser representado por:



13.2 Todos os vértices têm grau três, pelo que vamos começar por um qualquer: vamos seguir a ordem alfabética. Obtemos a seguinte coloração do grafo:



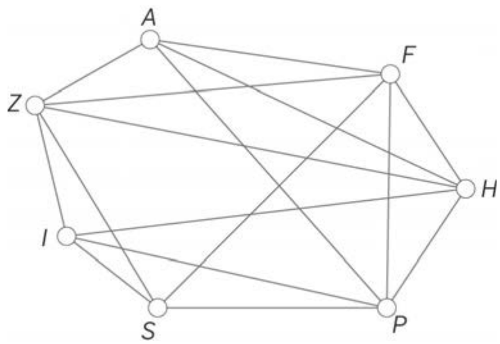
Precisamos de três recintos distintos para albergar todas as espécies:

- Um para a águia e a corça (*A* e *C*).
- Outro para o elefante, o leão e o rinoceronte (*E*, *L* e *R*).
- Um terceiro para a girafa, o panda e a zebra (*G*, *P* e *Z*).

No entanto, esta solução não é a única: *A*, *L*, *E* + *C*, *Z*, *G* + *R*, *P* é outra alternativa.

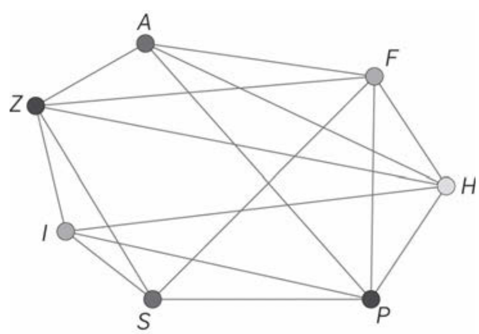
Atividade 14 (pág. 59)

Um grafo representativo desta situação pode ser (utilizaremos para os vértices apenas a primeira letra de cada modalidade):



Grau dos vértices: $A-4$; $F-5$; $H-5$; $P-5$; $S-4$; $I-4$; $Z-5$

Começamos pelo vértice F, que colorimos com uma primeira cor, tal como o vértice I, que não lhe é adjacente. Passamos ao próximo vértice de maior grau, H, que colorimos com uma segunda cor, e, como não tem vértices não adjacentes, passamos ao seguinte e repetimos o procedido até termos colorido todos os vértices. Obtemos, então, a seguinte coloração para o grafo:



Podemos organizar o horário das aulas da seguinte forma:

- 9h00: Aeróbica e *Step*.
- 10h00: *Fitball* e Ioga.
- 11h00: *Hip-Hop*.
- 12h00: *Zumba* e *Pump*.

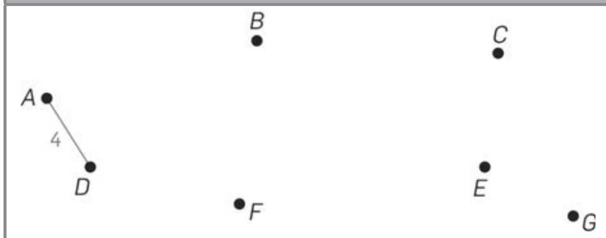
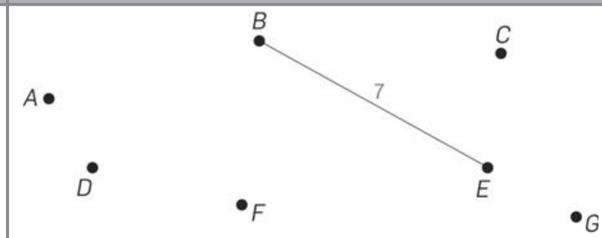
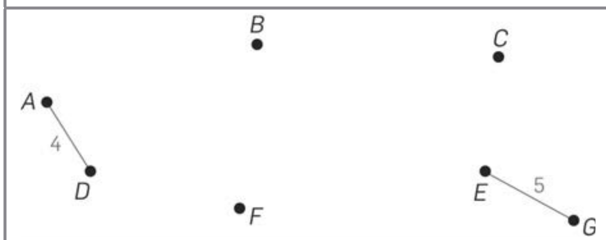
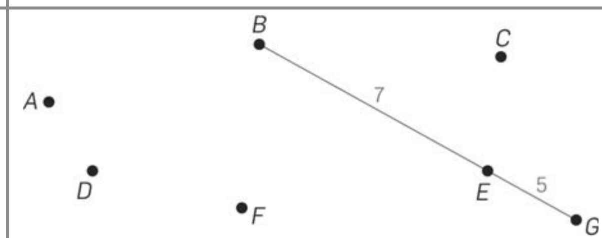
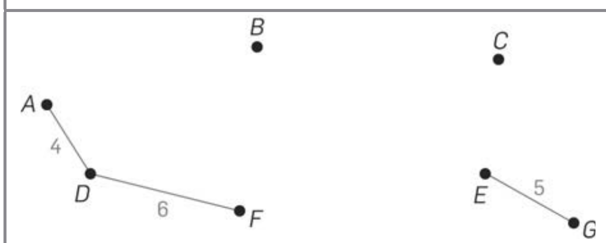
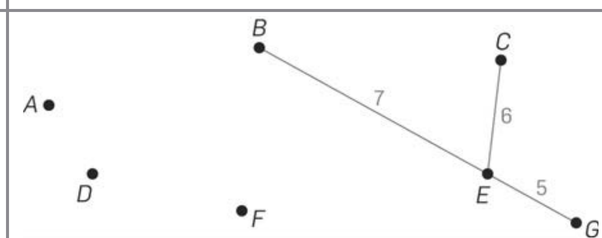
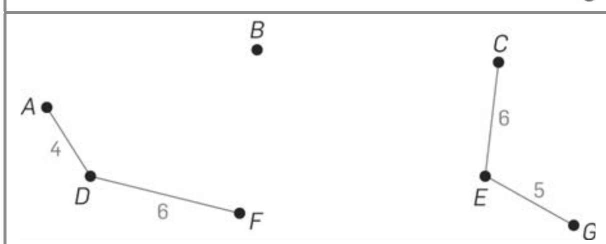
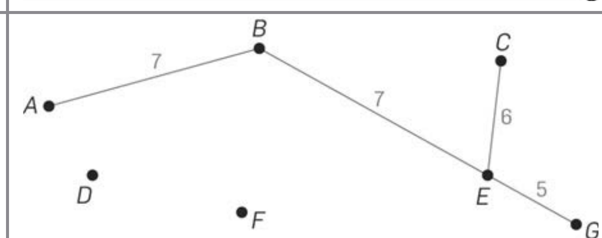
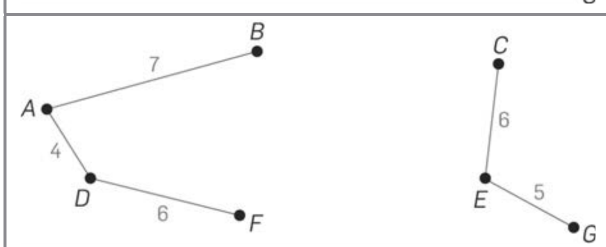
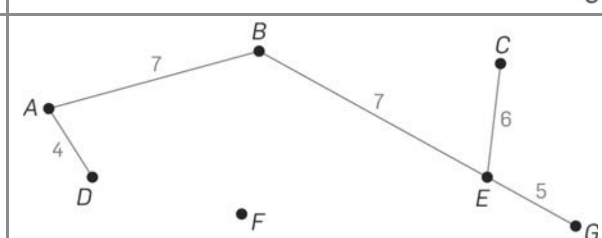
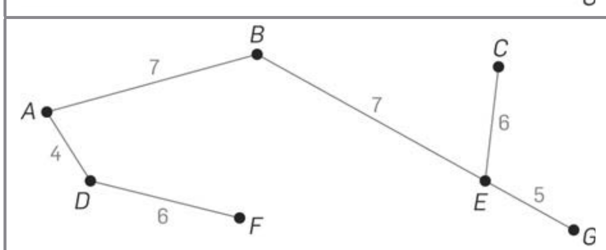
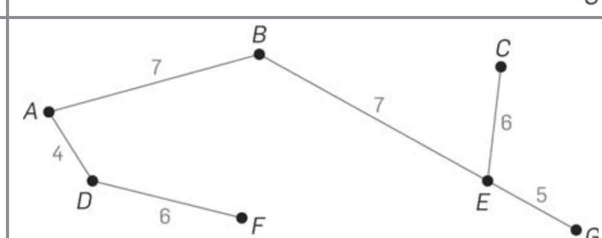
(Esta solução não é a única.)

2.4 Árvores abrangentes mínimas

Atividade 1 (pág. 64)

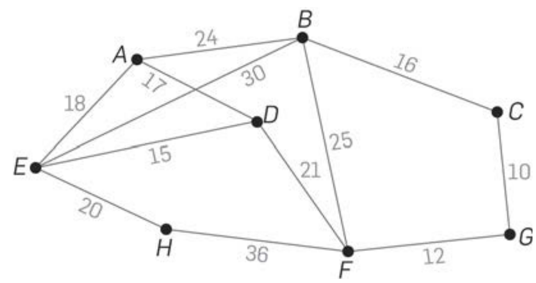
A árvore abrangente mínima pode, ou não, ser a mesma quer pelo algoritmo de Kruskal, quer pelo algoritmo de Prim, mas o comprimento total é sempre igual e mínimo (comprimento: 6 + 4 + 7 + 7 + + 6 + 5 = 35).

O processo de construção também difere:

<table>
<tr><th>1.1 Algoritmo de Kruskal</th><th>1.2 Algoritmo de Prim
(começando em B, por exemplo)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

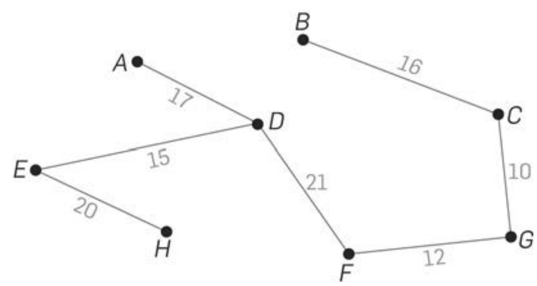
Atividade 2 (pág. 65)

Pretende-se determinar uma árvore que contenha todos os vértices (abrangente) e com o menor comprimento. Observando o grafo, vamos colocar as arestas por ordem crescente do seu peso:



$C \underset{10}{\text{—}} G;\ F \underset{12}{\text{—}} G;\ D \underset{15}{\text{—}} E;\ B \underset{16}{\text{—}} C;\ A \underset{17}{\text{—}} D;\ A \underset{18}{\text{—}} E;\ E \underset{20}{\text{—}} H;\ D \underset{21}{\text{—}} F;\ A \underset{24}{\text{—}} B;\ B \underset{25}{\text{—}} F;\ B \underset{30}{\text{—}} E;\ F \underset{36}{\text{—}} H$

Em seguida, vamos ligando os vértices de acordo com os pesos das arestas (do menor para o maior) sem formar circuitos. Assim, a árvore que se obtém, neste caso, é:

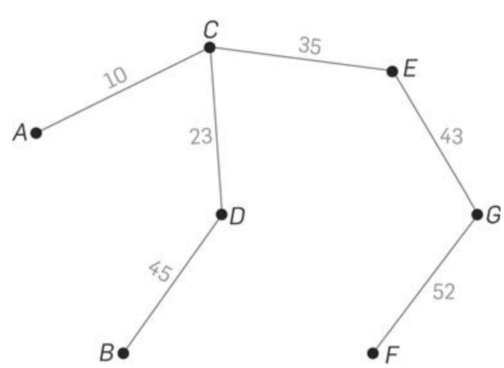


O comprimento total é de 111 metros.

Atividade 3 (pág. 65)

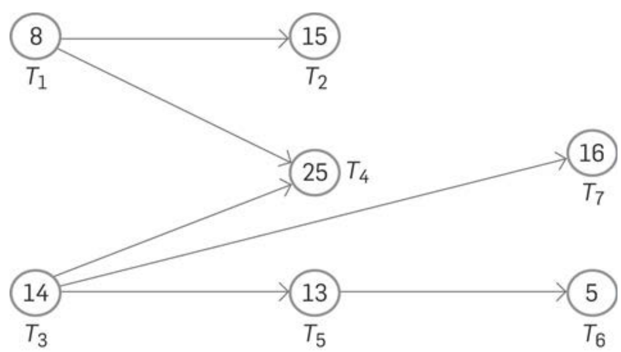
O processo é análogo ao anterior. É importante que os alunos se familiarizem com diversas situações em que a aplicação do algoritmo de Kruskal nos permite obter soluções ótimas.

Neste caso, o percurso mínimo para o camião é de 208 quilómetros e pode traduzir-se pela seguinte árvore:



Atividade 4 (pág. 69)

Os grandes projetos requerem uma calendarização de execução, um acompanhamento constante e uma perfeita coordenação das tarefas inerentes à sua concretização, não só para evitar atrasos, mas também para evitar custos adicionais. No caso concreto desta atividade, pretendemos esquematizar através de um grafo a informação fornecida pela tabela e que diz respeito às tarefas que ocorrem diariamente num aeroporto. Assim, tendo em conta não só os tempos necessários à concretização de cada uma das tarefas, mas também, e principalmente, as suas dependências, podemos traduzir os dados da tabela no grafo seguinte:



As tarefas T_1 e T_3 iniciam-se simultaneamente: ao fim de 8 minutos T_2 começa e após 14 minutos (do início) podem começar as tarefas T_4, T_5 e T_7 . São necessários mais 13 minutos (14 + 13 = 27 minutos após o início das operações) para dar início a T_6 . Nesta altura T_2 já terminou, mas T_4 e T_7 ainda não. Para concluir T_4 são necessários 14 minutos (para realizar T_3) mais 25 minutos, num total de 39 minutos. Como as restantes tarefas (T_2, T_5, T_6 e T_7) não dependem da realização de T_4, e se realizam em menos tempo, podemos concluir que o caminho crítico (formado pelas tarefas críticas, isto é, pelas tarefas cujo atraso na execução se repercute automaticamente na duração total do projeto) é formado pelas tarefas T_3 e T_4, com uma duração de 14 + 25 = 39 minutos.

Atividade 5 (pág. 69)

5.1

Tarefa	Duração (dias)	Precedências
A	2	Nenhuma
B	4	*A*
C	1	*B*
D	5	Nenhuma
E	4	*C* e *D*
F	5	*E*
G	9	*C* e *D*
H	3	*F* e *G*

5.2 A duração mínima do projeto é: 2 + 4 + 1 + 4 + 5 + 3 = 19 dias.

5.3 O caminho crítico será: *A – B – C – E – F – H*.