

1.2 Pârametro e estatística. Estimativa pontual

Atividade 1 (pág. 229)

- 1.1 O parâmetro é 53 kg e uma estatística é 50,3 kg.
- 1.2 O valor 1,6 horas é uma estatística.
- 1.3 O valor 83% é uma estatística.
- 1.4 O valor 72,5% é o parâmetro.

Atividade 2 (pág. 230)

Trabalho de pesquisa

1.4 Estimação de um valor médio

Atividade 1 (pág. 236)

- 1.1 e 1.2 São 216 amostras ($6^3 = 216$). Na tabela seguinte encontram-se todas as amostras possíveis, bem como a média de cada uma:

Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}
C ₁ , C ₁ , C ₁	28	C ₂ , C ₁ , C ₁	27,(3)	C ₃ , C ₁ , C ₁	26,(6)	C ₄ , C ₁ , C ₁	27,(3)	C ₅ , C ₁ , C ₁	28,(6)	C ₆ , C ₁ , C ₁	26
C ₁ , C ₁ , C ₂	27,(3)	C ₂ , C ₁ , C ₂	26,(6)	C ₃ , C ₁ , C ₂	26	C ₄ , C ₁ , C ₂	26,(6)	C ₅ , C ₁ , C ₂	26	C ₆ , C ₁ , C ₂	25,(3)
C ₁ , C ₁ , C ₃	26,(6)	C ₂ , C ₁ , C ₃	26	C ₃ , C ₁ , C ₃	26	C ₄ , C ₁ , C ₃	26	C ₅ , C ₁ , C ₃	27,(3)	C ₆ , C ₁ , C ₃	24,(6)
C ₁ , C ₁ , C ₄	27,(3)	C ₂ , C ₁ , C ₄	26,(6)	C ₃ , C ₁ , C ₄	26	C ₄ , C ₁ , C ₄	26,(6)	C ₅ , C ₁ , C ₄	28	C ₆ , C ₁ , C ₄	25,(3)
C ₁ , C ₁ , C ₅	28,(6)	C ₂ , C ₁ , C ₅	26	C ₃ , C ₁ , C ₅	27,(3)	C ₄ , C ₁ , C ₅	28	C ₅ , C ₁ , C ₅	29,3	C ₆ , C ₁ , C ₅	26,(6)
C ₁ , C ₁ , C ₆	26	C ₂ , C ₁ , C ₆	25,(3)	C ₃ , C ₁ , C ₆	24,(6)	C ₄ , C ₁ , C ₆	25,(3)	C ₅ , C ₁ , C ₆	26,(6)	C ₆ , C ₁ , C ₆	24
C ₁ , C ₂ , C ₁	27,(3)	C ₂ , C ₂ , C ₁	26,(6)	C ₃ , C ₂ , C ₁	26	C ₄ , C ₂ , C ₁	26,(6)	C ₅ , C ₂ , C ₁	26	C ₆ , C ₂ , C ₁	25,(3)
C ₁ , C ₂ , C ₂	26,(6)	C ₂ , C ₂ , C ₂	26	C ₃ , C ₂ , C ₂	25,(3)	C ₄ , C ₂ , C ₂	26	C ₅ , C ₂ , C ₂	27,(3)	C ₆ , C ₂ , C ₂	24,(6)
C ₁ , C ₂ , C ₃	26	C ₂ , C ₂ , C ₃	25,(3)	C ₃ , C ₂ , C ₃	24,(6)	C ₄ , C ₂ , C ₃	25,(3)	C ₅ , C ₂ , C ₃	26,(6)	C ₆ , C ₂ , C ₃	24
C ₁ , C ₂ , C ₄	26,(6)	C ₂ , C ₂ , C ₄	26	C ₃ , C ₂ , C ₄	25,(3)	C ₄ , C ₂ , C ₄	26	C ₅ , C ₂ , C ₄	27,(3)	C ₆ , C ₂ , C ₄	24,(6)
C ₁ , C ₂ , C ₅	28	C ₂ , C ₂ , C ₅	27,(3)	C ₃ , C ₂ , C ₅	26,(6)	C ₄ , C ₂ , C ₅	27,(3)	C ₅ , C ₂ , C ₅	28,(6)	C ₆ , C ₂ , C ₅	26
C ₁ , C ₂ , C ₆	25,(3)	C ₂ , C ₂ , C ₆	24,(6)	C ₃ , C ₂ , C ₆	24	C ₄ , C ₂ , C ₆	24,(6)	C ₅ , C ₂ , C ₆	26	C ₆ , C ₂ , C ₆	23,(3)
C ₁ , C ₃ , C ₁	26,(6)	C ₂ , C ₃ , C ₁	26	C ₃ , C ₃ , C ₁	26	C ₄ , C ₃ , C ₁	26	C ₅ , C ₃ , C ₁	27,(3)	C ₆ , C ₃ , C ₁	24,(6)
C ₁ , C ₃ , C ₂	26	C ₂ , C ₃ , C ₂	25,(3)	C ₃ , C ₃ , C ₂	24,(6)	C ₄ , C ₃ , C ₂	25,(3)	C ₅ , C ₃ , C ₂	26,(6)	C ₆ , C ₃ , C ₂	24
C ₁ , C ₃ , C ₃	26	C ₂ , C ₃ , C ₃	24,(6)	C ₃ , C ₃ , C ₃	24	C ₄ , C ₃ , C ₃	24,(6)	C ₅ , C ₃ , C ₃	26	C ₆ , C ₃ , C ₃	23,(3)
C ₁ , C ₃ , C ₄	26	C ₂ , C ₃ , C ₄	25,(3)	C ₃ , C ₃ , C ₄	24,(6)	C ₄ , C ₃ , C ₄	25,(3)	C ₅ , C ₃ , C ₄	26,(6)	C ₆ , C ₃ , C ₄	24
C ₁ , C ₃ , C ₅	27,(3)	C ₂ , C ₃ , C ₅	26,(6)	C ₃ , C ₃ , C ₅	26	C ₄ , C ₃ , C ₅	26,(6)	C ₅ , C ₃ , C ₅	28	C ₆ , C ₃ , C ₅	25,(3)
C ₁ , C ₃ , C ₆	24,(6)	C ₂ , C ₃ , C ₆	24	C ₃ , C ₃ , C ₆	23,(3)	C ₄ , C ₃ , C ₆	24	C ₅ , C ₃ , C ₆	25,(3)	C ₆ , C ₃ , C ₆	22,(6)
C ₁ , C ₄ , C ₁	27,(3)	C ₂ , C ₄ , C ₁	26,(6)	C ₃ , C ₄ , C ₁	26	C ₄ , C ₄ , C ₁	26,(6)	C ₅ , C ₄ , C ₁	28	C ₆ , C ₄ , C ₁	25,(3)
C ₁ , C ₄ , C ₂	26,(6)	C ₂ , C ₄ , C ₂	26	C ₃ , C ₄ , C ₂	25,(3)	C ₄ , C ₄ , C ₂	26	C ₅ , C ₄ , C ₂	27,(3)	C ₆ , C ₄ , C ₂	24,(6)
C ₁ , C ₄ , C ₃	26	C ₂ , C ₄ , C ₃	25,(3)	C ₃ , C ₄ , C ₃	24,(6)	C ₄ , C ₄ , C ₃	25,(3)	C ₅ , C ₄ , C ₃	26,(6)	C ₆ , C ₄ , C ₃	24

Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}	Amostras	\bar{X}
C ₁ , C ₄ , C ₄	26,(6)	C ₂ , C ₄ , C ₄	26	C ₃ , C ₄ , C ₄	25,(3)	C ₄ , C ₄ , C ₄	26	C ₅ , C ₄ , C ₄	27,(3)	C ₆ , C ₄ , C ₄	24,(6)
C ₁ , C ₄ , C ₅	28	C ₂ , C ₄ , C ₅	27,(3)	C ₃ , C ₄ , C ₅	26,(6)	C ₄ , C ₄ , C ₅	27,(3)	C ₅ , C ₄ , C ₅	27,(3)	C ₆ , C ₄ , C ₅	26
C ₁ , C ₄ , C ₆	25,(3)	C ₂ , C ₄ , C ₆	24,(6)	C ₃ , C ₄ , C ₆	24	C ₄ , C ₄ , C ₆	24,(6)	C ₅ , C ₄ , C ₆	26	C ₆ , C ₄ , C ₆	23,(3)
C ₁ , C ₅ , C ₁	28,(6)	C ₂ , C ₅ , C ₁	26	C ₃ , C ₅ , C ₁	27,(3)	C ₄ , C ₅ , C ₁	28	C ₅ , C ₅ , C ₁	29,3	C ₆ , C ₅ , C ₁	26,(6)
C ₁ , C ₅ , C ₂	26	C ₂ , C ₅ , C ₂	25,(3)	C ₃ , C ₅ , C ₂	26,(6)	C ₄ , C ₅ , C ₂	27,(3)	C ₅ , C ₅ , C ₂	28,(6)	C ₆ , C ₅ , C ₂	26
C ₁ , C ₅ , C ₃	27,(3)	C ₂ , C ₅ , C ₃	26,(6)	C ₃ , C ₅ , C ₃	26	C ₄ , C ₅ , C ₃	26,(6)	C ₅ , C ₅ , C ₃	28	C ₆ , C ₅ , C ₃	25,(3)
C ₁ , C ₅ , C ₄	28	C ₂ , C ₅ , C ₄	27,(3)	C ₃ , C ₅ , C ₄	26,(6)	C ₄ , C ₅ , C ₄	27,(3)	C ₅ , C ₅ , C ₄	27,(3)	C ₆ , C ₅ , C ₄	26
C ₁ , C ₅ , C ₅	29,3	C ₂ , C ₅ , C ₅	28,(6)	C ₃ , C ₅ , C ₅	28	C ₄ , C ₅ , C ₅	27,(3)	C ₅ , C ₅ , C ₅	30	C ₆ , C ₅ , C ₅	27,(3)
C ₁ , C ₅ , C ₆	26,(6)	C ₂ , C ₅ , C ₆	26	C ₃ , C ₅ , C ₆	25,(3)	C ₄ , C ₅ , C ₆	26	C ₅ , C ₅ , C ₆	27,(3)	C ₆ , C ₅ , C ₆	24,(6)
C ₁ , C ₆ , C ₁	26	C ₂ , C ₆ , C ₁	25,(3)	C ₃ , C ₆ , C ₁	24,(6)	C ₄ , C ₆ , C ₁	25,(3)	C ₅ , C ₆ , C ₁	26,(6)	C ₆ , C ₆ , C ₁	26
C ₁ , C ₆ , C ₂	25,(3)	C ₂ , C ₆ , C ₂	24,(6)	C ₃ , C ₆ , C ₂	24	C ₄ , C ₆ , C ₂	24,(6)	C ₅ , C ₆ , C ₂	26	C ₆ , C ₆ , C ₂	23,(3)
C ₁ , C ₆ , C ₃	24,(6)	C ₂ , C ₆ , C ₃	24	C ₃ , C ₆ , C ₃	23,(3)	C ₄ , C ₆ , C ₃	24	C ₅ , C ₆ , C ₃	25,(3)	C ₆ , C ₆ , C ₃	22,(6)
C ₁ , C ₆ , C ₄	25,(3)	C ₂ , C ₆ , C ₄	24,(6)	C ₃ , C ₆ , C ₄	24	C ₄ , C ₆ , C ₄	24,(6)	C ₅ , C ₆ , C ₄	26	C ₆ , C ₆ , C ₄	23,(3)
C ₁ , C ₆ , C ₅	26,(6)	C ₂ , C ₆ , C ₅	26	C ₃ , C ₆ , C ₅	25,(3)	C ₄ , C ₆ , C ₅	26	C ₅ , C ₆ , C ₅	27,(3)	C ₆ , C ₆ , C ₅	24,(6)
C ₁ , C ₆ , C ₆	24	C ₂ , C ₆ , C ₆	23,(3)	C ₃ , C ₆ , C ₆	22,(6)	C ₄ , C ₆ , C ₆	23,(3)	C ₅ , C ₆ , C ₆	24,(6)	C ₆ , C ₆ , C ₆	22

1.3 Temos 216 casos possíveis. Resta fazer a contagem dos casos favoráveis para cada um dos valores de \bar{X} :

\bar{X}	22	22,(6)	23,(3)	24	24,(6)	25,(3)	26	26,(6)	27,(3)	28	28,(6)	29,(3)	30
P	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{9}{216}$	$\frac{16}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{33}{216}$	$\frac{38}{216}$	$\frac{33}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{16}{216}$	$\frac{9}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$

Com o auxílio, por exemplo, da calculadora gráfica, chegamos aos valores:

$$E(\bar{X}) = 26 \text{ e } \sigma_{\bar{X}} \approx 1,491$$

1.4 e 1.5 O estimador é não enviesado, uma vez que a média da distribuição de amostragem coincide com o parâmetro a estimar. O desvio-padrão da distribuição de amostragem da média é, aproximadamente, 1,491, valor menor do que no caso de amostras de dimensão 2 (que era de, aproximadamente, 1,826). Podemos dizer que, ao aumentar a dimensão da amostra, diminuimos a variabilidade da estatística.

Atividade 2 (pág. 239)

Trabalho de pesquisa

1.5 Importância do teorema do limite central

Atividade 1 (pág. 244)

Trabalho de pesquisa

Atividade 2 (pág. 244)

2.1 O valor médio da distribuição de amostragem é: $E(\bar{X}) = 15,3$. O desvio-padrão amostral é:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{7,02}{\sqrt{60}} \approx 0,906$$

2.2 Como a dimensão da amostra é maior do que 30 (é igual a 60), então, pelo teorema do limite central, podemos afirmar que a distribuição de amostragem da média pode ser aproximada a uma distribuição normal com valor médio de 15,3 e desvio-padrão de 0,906.

Seja $U \sim N(0, 1)$.

Então:

$$U = \frac{\bar{X} - 15,3}{0,906} \Leftrightarrow \bar{X} = 0,906U + 15,3$$

$$\begin{aligned} E, \text{ assim: } P(13 < \bar{X} < 15) &= P(13 < 0,906U + 15,3 < 15) = P(-2,539 < U < -0,331) = \\ &= 1 - \Phi(0,33) - 1 + \Phi(2,54) = -0,6293 + 0,9945 = \\ &= 0,3652 \end{aligned}$$

(Valores da tabela da distribuição normal *standard*, página 193 do Manual)

A probabilidade de o número médio de defeitos (na amostra) estar entre 13 e 15 defeitos por cada 100 metros de tecido é de, aproximadamente, 36,52%.

$$\begin{aligned} 2.3 \quad P(|\bar{X} - \mu| \leq 0,5) &= P(|0,906U + 15,3 - 15,3| \leq 0,5) = P(|U| < 0,552) = \\ &= P(-0,552 < U < 0,552) = 2 \times \Phi(0,55) - 1 = \\ &= 2 \times 0,7088 - 1 = \\ &= 0,4176 \end{aligned}$$

(Valor da tabela da distribuição normal *standard*, página 193 do Manual)

A probabilidade pedida é de, aproximadamente, 41,76%.

1.6 Intervalos de confiança para o valor médio

Atividade 1 (pág. 247)

$$\mu = 120 \text{ mm}$$

Um intervalo de confiança de 90% para o parâmetro μ é de forma:

$$\left[\bar{x} - 1,645 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,645 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[120 - 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{50}}; 120 + 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{50}} \right] =]117,67; 122,33[$$

Atividade 2 (pág. 247)

Significa que se recolhermos muitas amostras de dimensão n , calcularmos as médias e os desvios-padrão dessas amostras e construirmos os intervalos de confiança respetivos, cerca de 90% desses intervalos conterão o valor médio μ , enquanto os restantes 10% não conterão o parâmetro μ . Não temos a certeza de que um determinado intervalo contenha o parâmetro desconhecido, mas temos 90% de confiança que o intervalo que calculámos contenha o valor do parâmetro.

Atividade 3 (pág. 248)

$$n = 1000 \quad \bar{x} = 75 \quad s = 10$$

Um intervalo de confiança para μ com 95% de confiança é dado por:

$$\left[75 - 1,96 \times \frac{10}{\sqrt{1000}}; 75 + 1,96 \times \frac{10}{\sqrt{1000}} \right] =]74,38; 75,62[$$

Atividade 4 (pág. 249)

$$n = 200 \quad \bar{x} = 110 \quad s = 15$$

4.1 Um intervalo de confiança para μ com 99% de confiança é dado por:

$$\left[110 - 2,576 \times \frac{15}{\sqrt{200}}; 110 + 2,576 \times \frac{15}{\sqrt{200}} \right] =]107,27; 112,73[$$

4.2 Não, porque a amostra tem dimensão superior a 30.

1.7 Estimativa pontual de proporção

Atividade 1 (pág. 252)

Trabalho de pesquisa

Atividade 2 (pág. 253)

$$p = 75\%, n = 1200, \mu = 0,75 \text{ e } \sigma = \sqrt{\frac{0,75(1-0,75)}{1200}} = 0,0125$$

Atividade 3 (pág. 253)

Trabalho de pesquisa

1.8 Intervalos de confiança para a proporção

Atividade 1 (pág. 256)

$$\hat{p} = \frac{48}{150} = 0,32$$

O intervalo de confiança será:

$$\left[0,32 - 1,645 \times \sqrt{\frac{0,32(1-0,32)}{150}}; 0,32 + 1,645 \times \sqrt{\frac{0,32(1-0,32)}{150}} \right] =]0,26; 0,38[$$

A proporção dos votos encontra-se entre os 26% e os 38%.

Atividade 2 (pág. 256)

Tem-se que: $n = 500$, $z = 1,960$ e $\hat{p} = \frac{8}{500} = 0,016$

O intervalo de confiança para a proporção de livros com defeito será:

$$\left[0,016 - 1,960 \times \sqrt{\frac{0,016(1 - 0,016)}{500}}; 0,016 + 1,960 \times \sqrt{\frac{0,016(1 - 0,016)}{500}} \right] =]0,005; 0,027[$$

Atividade 3 (pág. 256)

$n = 300$ e $\hat{p} = \frac{180}{300} = 0,6$

O intervalo de confiança para a proporção com 99% de confiança é da forma:

$$\left[0,6 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,6(1 - 0,6)}{300}}; 0,6 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,6(1 - 0,6)}{300}} \right] =]0,53; 0,67[$$

1.9 Interpretação do conceito de intervalo de confiança

Atividade 1 (pág. 257)

Com uma confiança de 90%, podemos afirmar que entre 83% e 87% dos entrevistados tinham automóvel.

Atividade 2 (pág. 257)

Com uma confiança de 95%, podemos afirmar que entre 7% e 15% dos entrevistados preferem *smartphones* na lista de presentes de Natal.

Atividade 3 (pág. 259)

$\varepsilon = 5 \text{ min}$ $n = 50$ $\sigma = 20$

$$n = \left(\frac{2,576 \times 20}{5} \right)^2 \approx 107$$

Aproximadamente 107 alunos.

Atividade 4 (pág. 260)

$\varepsilon = 2\%$

$$n = \left(\frac{1,96}{0,02} \right)^2 \times 0,35(1 - 0,35) \approx 2185$$

Aproximadamente 2185 eleitores.

Atividade 5 (pág. 261)

$$\varepsilon = 4\%$$

Tendo em conta o resultado anterior, tem-se que:

$$n = \left(\frac{2,576}{0,04} \right)^2 \times 0,25 \approx 1037$$

Aproximadamente 1037 pessoas.

Exercícios de aplicação (pág. 266)

1. Composição

2. Composição

3.1 A população é constituída pelas 1486 pessoas que estão na sala.

3.2 A amostra será constituída pelas 12 pessoas que vão ser selecionadas de forma sistemática.

3.3 Se o primeiro sorteado é o número 16, haverá ainda $1486 - 16 = 1470$ pessoas suscetíveis de serem selecionadas. Como $1470 : 12 = 122,5 \approx 123$, haverá 123 senhas de intervalo entre dois selecionados consecutivos.

$$16 + 123 = 139 ; 139 + 123 = 262 ; 262 + 123 = 385 ; 385 + 123 = 508 ; 508 + 123 = 631 ;$$

$$631 + 123 = 754 ; 754 + 123 = 877 ; 877 + 123 = 1000 ; 1000 + 123 = 1123 ;$$

$$1123 + 123 = 1246 ; 1246 + 123 = 1369$$

Assim, os felizes contemplados serão os espetadores que tiverem uma das senhas pertencentes ao conjunto: {16, 262, 385, 508, 631, 754, 877, 1000, 1123, 1246, 1369}

4.1

	Número total de alunos	Porcentagem		Número de alunos	
		♀	♂	♀	♂
1.º Ciclo	860	55	<u>45</u>	<u>473</u>	<u>387</u>
2.º Ciclo	580	<u>50</u>	50	<u>290</u>	<u>290</u>
3.º Ciclo	<u>1230</u>	<u>60</u>	40	<u>738</u>	<u>492</u>
Secundário	1850	36	<u>64</u>	<u>666</u>	<u>1184</u>
Total	<u>4520</u>			<u>2172</u>	<u>2358</u>

4.2 $4520 \times 0,10 = 452$ alunos que deverão fazer parte da amostra.

$$1.^\circ \text{ Ciclo } \begin{cases} 473 \times 0,10 = 47,3 \approx 47 \text{ raparigas} \\ 387 \times 0,10 = 38,7 \approx 39 \text{ rapazes} \end{cases}$$

$47 + 39 = 86$ alunos, que corresponde a 10% do total de alunos do 1.º Ciclo.